

Andrey
IFUSP

NOTAS DE AULA

TEORIA MAGNETOIDRODINÂMICA

EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE

R.M.O. Galvão

ITA-CTA
1989

Curso Teoria Magnetohidrodinâmica : Equilíbrio e Estabilidade

FF-270

Instituto Tecnológico da Aeronáutica

Segundo semestre/89

Matéria:

Equilíbrio MHD; ✓

Estabilidade MHD ideal; ✓

Modos resistivos; ✓

Modos não-lineares e ilhas magnéticas ✓

não foi visto, Princípio de Faraday

Referências

J. Freidberg: Ideal Magnetohydrodynamics

ideal

J. Goldblond: Lecture Notes on Ideal Magnetohydrodynamics

G. Bateman: MHD Instabilities

J. Wesson: Nuclear Fusion 18, 87 (1978)

K. Miyamoto:

V.D. Shafranov: Reviews of Plasma Physics, Vol. II

L.S. Solov'ev: Reviews of Plasma Physics, Vol. III

L.S. Solov'ev and V.D. Shafranov: Reviews of Plasma Physics, Vol. V

B.B. Kadomtsev: Reviews of Plasma Physics, Vol. II

S. Zehrforn e Shafranov

A.B. Mikhailovskii: Reviews of Plasma Physics, Vol. IX (Tokamak Instabilities)

R. B. White, Resistive Reconnection, Rev. Modern Physics 57, 193 (1985)

R. B. Paris, Annales de Physique (Fis) 9, 347 (1984)

? Resistive Instabilities in MHD

Vamos partir das equações MHD resistivas, conforme apresentadas por Goldblond (notas de aula):

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{continuidade de massa}$$

$$(1) \quad \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_q \vec{v}) = 0 ; \rho_q \vec{v} = \vec{j} \quad \text{continuidade de carga}$$

$$(3) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p - \rho_q \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad \text{conservação de momento}$$

$(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla)$

$$(1) \quad \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \vec{v} \cdot \nabla p + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{v} = \eta j^2 \quad \text{conservação de energia}$$

(equação de estado)

$$(3) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{lei de Faraday}$$

$$(3) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} - \nabla \times \vec{B} = 0 \quad \text{lei de Ampère}$$

$$(3) \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad \text{lei de Ohm (constitutiva)}$$

Note que este sistema de equações é não-linear (produtos tipo $\vec{j} \times \vec{E}$), e representa na realidade quinze equações para quinze incógnitas $[\rho(1), \rho_q(2), \vec{v}(3), p(1), \vec{j}(3), \vec{E}(3), \vec{B}(3)]$. Naturalmente isto é um sistema bastante complicado para resolver em casos gerais, mesmo em computadores com processamento paralelo. Por isso, vamos procurar simplificar as equações um pouco e resolvê-las primeiro em situações de equilíbrio estacionário ($\partial/\partial t = 0$) e depois considerar perturbações no intorno destes equilíbrios.

1. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Nas equações de Maxwell, não incluímos a equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. A razão é que na realidade esta equação representa apenas uma condição inicial; se for satisfeita em $t=0$ será satisfeita sempre. Para verificar isto, consideremos a lei de Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E})}_{=0} = 0 \quad \therefore \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = \text{const.}$$

Impondo $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ no instante inicial, ele será sempre nulo. Portanto, sempre que necessário vamos utilizar esta equação mesmo que ela não seja explicitamente incluída nas equações básicas.

2. $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

A lei de Coulomb também não foi incluída nas equações básicas porque, como a equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, ela é satisfeita se a equação da continuidade e as leis de Faraday e Ampere forem satisfeitas. No entanto, ao invés de seguir a equação para a continuidade de cargas podemos simplesmente não usar a equação da continuidade e usar a lei de Coulomb para calcular ρ .

3. Equação de energia

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \vec{\nabla} \cdot \nabla p + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{\nabla} = \eta j^2$$

$$\therefore \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{\nabla} = \eta j^2$$

Da equação da continuidade, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \nabla p + \rho \nabla \cdot \vec{\nabla} = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot \vec{\nabla} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt} = \eta j^2$$

$$\therefore \rho \frac{dp}{dt} - \frac{5}{3} p \frac{dp}{dt} = \frac{2}{3} \rho \eta j^2$$

$$\left(\frac{W}{m^3} \right) \quad \left(\frac{W}{m^3} \right) \quad \left(\frac{W}{m^3} \right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = \frac{2}{3} \rho \eta j^2 ; \quad \gamma = \frac{5}{3}}$$

↑
aquecimento ôhmico

Se o processo for suficientemente rápido para que o efeito do aquecimento ôhmico não for importante, então temos a lei de estado adiabático

$$\boxed{p \rho^{-\gamma} = \text{const.}}$$

Em alguns casos vamos considerar processos incompressíveis, $\frac{dp}{dt} = 0$; pela equação da continuidade temos

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\nabla} = 0}$$

4.
(07/08/17)

O processo incompressível pode também ser considerado um processo adiabático em que $\gamma \rightarrow \infty$.

$$\frac{d}{dt}(p \rho^{-\gamma}) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} \rho^{-\gamma} - \gamma \rho^{-(\gamma+1)} p \frac{d\rho}{dt} = 0 ;$$

$$\therefore \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{p} \frac{dp}{dt} \quad \therefore \gamma \rightarrow \infty, \frac{dp}{dt} \text{ finito} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} \rightarrow 0.$$

4. Escala de tempo

Uma dificuldade difícil de ser superada para resolver o sistema de equações de um fluido, mesmo numericamente, é que todas estão embutidas três escalas de tempo muito disparas. Para 'extrair' estas escalas, vamos considerar inicialmente as três últimas equações do sistema

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} - \nabla \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\eta} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\therefore \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\eta} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times \vec{B} = 0 \quad (\nabla \times)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} + \frac{\mu_0}{\eta} [\nabla \times \vec{E} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})] - \nabla \times \nabla \times \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0}{\eta} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right]$$

①

②

③

④

Vamos considerar que, em mais baixa 'ordem', os termos desta equação sejam balanceados 2 a 2.

① $\ll$ ②

$$\nabla^2 \vec{B} \approx \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{ondas electromagnéticas: } \tau_c \sim \frac{L}{c}$$

$$L \sim 1 \text{ m}; c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \Rightarrow \tau_c \sim 3 \times 10^{-9} \text{ s}$$

① $\ll$ ③

$$\nabla^2 \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{\eta} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \approx 0 : \text{equação de difusão resistiva}$$

do campo magnético (fenómeno lento)

$$\tau_r \sim \frac{L^2 \mu_0}{\eta} ; \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad \eta \approx 1.7 \times 10^{-8} \Omega \text{m} \quad \Rightarrow \tau_r \sim 75 \text{ s} \quad \underline{\text{muito lento!}}$$

Notem que estas duas escalas são relacionadas com fenómenos físicos que não envolvem o movimento do fluido ($\vec{v}$ não aparece)

② $\ll$ ③

① $\ll$ ④

> não misturam escalas de tempo e espaço; não caracterizam novos fenómenos

② $\ll$ ④

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \approx - \frac{\mu_0}{\eta} \nabla \times \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{B}{c^2 \tau^2} \ll \frac{\tau_r}{L^2} \frac{B v}{L}$$

$$\sim \frac{L^2 / \tau^2}{c^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \quad \ll \frac{v}{L / \tau_r} > 1$$

$\therefore$ impossível balancear estes dois termos

Finalmente, temos

③ em ④

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

Para verificar as ordens dos termos nesta equação, temos que encontrar esta relação entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$; esta relação vem naturalmente da equação de conservação de momento

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_q \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \frac{B^2}{2}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \rho_q \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$



Do balanceamento destes dois termos, vemos que gradientes de campo magnético podem induzir a fluxos no plasma; para estimar o tempo característico destes fluxos, vamos considerar a ordem de grandeza destes termos

$$\rho \frac{v}{\tau_A} \sim \frac{B^2}{\mu_0 L}$$

Mas, da equação para $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ temos

$$\frac{B}{\tau_A} \sim \frac{vB}{L}$$

$$\therefore \frac{B}{\tau_A} \sim \frac{\tau_A}{\rho} \frac{B^2}{\mu_0 L} \frac{B}{L} \therefore \tau_A^2 \sim \frac{L^2}{B^2/\mu_0 \rho} \therefore \tau_A \sim \frac{L}{v_A}$$

onde $\boxed{v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}}$ é a velocidade de Alfvén

A velocidade de Alfvén é dada por

$$v_A = 2.18 \times 10^6 \frac{B}{\sqrt{A \frac{n_i}{10^0}}}$$

$$B \sim 1 \text{ T}; n_i \sim 0.5 \times 10^{20}; A = 1 \Rightarrow v_A \approx 3 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\tau_A \sim 3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_A} \sim 10^{-2}; \quad \frac{\tau_r}{\tau_A} \sim 2.5 \times 10^8$$

Nos problemas de equilíbrio e estabilidade, nós vamos estar interessados em fenômenos que evoluem numa escala de tempo

$$\tau_c \ll \tau \sim \tau_A \ll \tau_r$$

Portanto nós podemos desprezar fenômenos que se propagam com a velocidade da luz, ou seja, a corrente de deslocamento na lei de Ampère o que equivale a considerar $v^2/c^2 \ll 1$, onde v é a velocidade característica dos fenômenos que vamos considerar. Desta forma a lei de Ampère fica

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}.$$

Mas esta equação implica em que $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, ou seja, $\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0$, o que parece estar em conflito com a lei de Coulomb

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \left[-\eta \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \right]$$

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} \sim \epsilon_0 \frac{B}{\tau_A^2} \sim \epsilon_0 \mu_0 \frac{B}{\mu_0 \tau_A^2} = \frac{v_A^2}{c^2} \frac{B}{\mu_0 L^2} \ll 1$$

Portanto, em mais baixa ordem em v^2/c^2 , a equação de conservação de carga pode ser deixada de lado.

Com o cancelamento da corrente de deslocamento na lei de Ampère, vamos ver como fica a equação de energia.

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \eta j^2$$

Para que o aquecimento ôhmico seja relevante, devemos ter

$$\frac{P}{\tau} \sim \eta j^2$$

Mas, da lei de Ampère, $j \sim \frac{B}{\mu_0 L}$; portanto

$$\frac{P}{\tau} \sim \eta \frac{B^2}{\mu_0^2 L^2} = \frac{\eta}{\mu_0 L^2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{\tau_r} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\tau \sim \frac{P}{B^2/\mu_0} \tau_r$$

$$\frac{P}{B^2/2\mu_0} = \beta \sim 1 \text{ a } 10\% \text{ em tokamaks}$$

$$\tau \approx \frac{\tau_r}{100}$$

que ainda é muito maior que o tempo de Alfvén que estamos considerando. Portanto, podemos considerar a equação de energia como simplificada a lei adiabática

$p \rho^{-\gamma} = \text{const.} ; \gamma = \frac{5}{3}$

As equações MHD resistivas simplificadas ficam então

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\
 & \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0 \\
 & \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \\
 & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = 0 \\
 & \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \\
 & \rho p^{-\chi} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \frac{5}{3} p \nabla \cdot \vec{v} = 0
 \end{aligned}$$

que ainda representa um conjunto de quatorze equações para o mesmo número de incógnitas.

Condições de Contorno

Os campos elétrico e magnético devem satisfazer as condições de contorno que conhecemos do eletromagnetismo; no entanto, como estamos tratando de um fluido que se move, devemos também considerar as condições de contorno para $\vec{v}$.

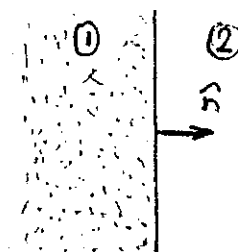
Vamos considerar a interface de um plasma (meio 1) com um meio qualquer (meio 2) que pode ser o vácuo ou uma parede material.

Da lei $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, obtemos (Reitz, Milford e Christy, p. 333)

$$[[\vec{n} \cdot \vec{B}]] = 0$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal à interface e

$$[[x]] = x_2 - x_1$$



A condição para a componente tangencial do campo magnético é derivada da lei de Ampère. Como a corrente de deslocamento não introduz nenhuma contribuição para a condição de contorno, a lei de Ampère simplificada dá o mesmo resultado

$$[\vec{n} \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{J}_s,$$

onde $\vec{J}_s$ é a densidade de corrente superficial na interface.

Para a velocidade, não há nenhuma condição de contorno para sua componente tangencial porque o plasma pode 'deslizar' com relação ao vácuo ou com relação a uma parede. No entanto, para a componente normal, temos que considerar várias possibilidades:

i) interface plasma-vácuo:

Como no vácuo não existe fluido, a componente normal do deslocamento da superfície do plasma pode ser qualquer, ou seja,

$$\vec{n} \cdot \vec{v} \text{ qualquer}$$

ii) interface plasma-parede rígida

Neste caso o plasma não pode mover a parede, portanto,

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

iii) interface plasma-outro fluido

Para manter a coerência de cada fluido, temos que evitar a discontinuidade do fluxo através da fronteira, ou seja,

$$[\vec{n} \cdot \vec{v}] = 0$$

(10/02/23)

As condições de contorno para o campo elétrico não serão utilizadas porque, na realidade, o campo elétrico pode ser facilmente eliminado das equações acima. No entanto, nós precisamos estabelecer uma condição de contorno para a pressão; para isto é necessário trabalhar um pouco mais com a equação de conservação de momento.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = 0$$

onde usamos a lei de Ampère. Usando a identidade vetorial

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{B}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{a})$$

temos

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \frac{B^2}{2} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\therefore \underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\rho \frac{d\vec{v}}{dt}} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Vamos denominar $\delta \vec{x}$ um deslocamento infinitesimal de um lado da interface para outro; como

$$\delta \vec{x} \cdot \nabla() \approx \delta(),$$

podemos escrever

$$\delta \vec{x} \cdot \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = -\delta \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{\mu_0} \cdot \delta \vec{x}$$

Portanto, no limite $\delta \vec{x} \rightarrow 0$, temos

$$\delta \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \left[\left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \right] = 0$$

Veremos logo adiante que $B^2/2\mu_0$ é a pressão exercida pelo plasma perpendicularmente às linhas de força. Portanto esta condição significa que a pressão total (cinética + magnética) tem que ser conservada através da interface.

Resumo das condições de contorno

$$[\vec{n} \cdot \vec{B}] = 0$$

$\vec{n} \cdot \vec{v}$ qualquer (plasma-vácuo)

$$[\vec{n} \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_s$$

$[\vec{n} \cdot \vec{v}] = 0$ (plasma-fluido)

$$[p + \frac{B^2}{2\mu_0}] = 0$$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (parede rígida)

É preciso um pouco de cuidado de cuidado ao usar estas condições. Se $\vec{j}_s$ for especificado, existem 4 equações para as 3 componentes de $\vec{B}$. Neste caso, a interface do plasma não pode ser especificada e tem que ser determinada de forma auto-consistente. Se a interface do plasma for especificada, então a segunda condição é usada para calcular $\vec{j}_s$.

Nos problemas de equilíbrio, desprezamos η e consideramos o plasma um condutor perfeito. Num condutor perfeito não pode haver uma componente normal do campo magnético na interface porque surgiriam forças infinitas ($\vec{j}_s \times \vec{B}$). Neste caso, a primeira condição de contorno fica simplesmente

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_{\text{plasma}} = 0$$

Integral de Energia

Vamos retornar à equação de conservação de momento

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

Vamos multiplicar escalarmente esta equação por $\vec{v}$; o primeiro termo fica

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \underbrace{v_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i}_{\frac{1}{2} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i v_i}$$

$$\therefore \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \rho \left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da equação fica

$$-\vec{v} \cdot \nabla p ;$$

mas, da lei de estado, temos

$$\frac{dp}{\rho} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (1-\gamma) \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma (p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla p) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (1-\gamma) \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma \nabla \cdot (p \vec{v}) = 0$$

$$\vec{v} \cdot \nabla p = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla \cdot (p \vec{v})$$

O último termo fica

$$\vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$= -(\eta \vec{j} - \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$= -\eta j^2 + \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = -\eta j^2 + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= -\eta j^2 - \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

Juntando todas as termos, obtemos

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \vec{v} + \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = -\eta j^2}$$

Esta equação representa o teorema de conservação de energia no plasma; as varias parcelas são

$$w_k = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad : \text{densidade de energia cinética}$$

$$e = \frac{p}{\gamma-1} \quad : \text{densidade de energia interna}$$

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad : \text{densidade de energia magnética}$$

$w_p = e + w_B$
(densidade de energia plasma)

O fluxo total de energia $\vec{S}$ (energia/área.tempo) é dado por

$$\vec{S} = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \vec{v} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

(vetor de Poynting)

enquanto que $-\eta j^2$ é a energia dissipado por efeito ôhmico por unidade de volume/tempo.

A conservação de energia pode ser escrita de uma forma integral fazendo a integral sobre um volume que engloba todo o plasma.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV + \int \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \vec{v} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] dV = - \int \eta j^2 dV$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV + \int \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \vec{v} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] \cdot d\vec{S} = - \int \eta j^2 dV}$$

A dissipação ôhmica representa sempre uma perda de energia; quando não houver dissipação ôhmica $\eta \rightarrow 0$, a energia se conserva. Com dissipação ôhmica, a energia interna do plasma só pode aumentar ($\partial/\partial t > 0$) se houver um fluxo de energia para o interior do plasma, ou seja, $\vec{v}$ ou $\vec{E} \times \vec{B}$ contrário a $d\vec{S}$ na superfície do plasma.

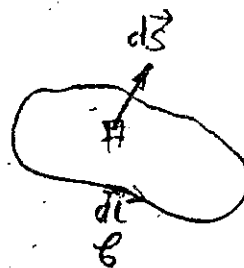
Difusão do Campo Magnético no Plasma

As leis de Faraday, Ampère e Ohm podem ser combinadas para eliminar completamente o campo elétrico e a densidade de corrente na equação de evolução para $\vec{B}$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times [\eta \vec{J} - \vec{v} \times \vec{B}] = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Para ver o significado desta equação, vamos considerar uma superfície S arbitrária dentro do plasma, limitada por um contorno C . Fazendo o produto escalar e integrando sobre toda a superfície, temos



$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int [\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot d\vec{S} = - \int \left[\nabla \times \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right] \cdot d\vec{S}.$$

Aplicando o teorema de Stokes nas duas últimas integrais, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \oint_C \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

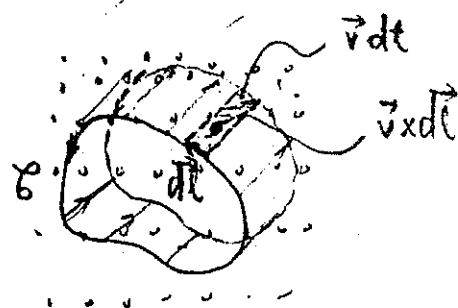
Vamos escrever a segunda integral numa forma um pouco diferente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) = - \oint_C \eta \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

A primeira integral representa a taxa de variação temporal do fluxo

do campo magnético $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ através de uma superfície fixa S . A segundo integral representa a taxa de incremento temporal do fluxo devido à varredura da contorno $\mathcal{C}$ se movendo com a velocidade local do fluido $\vec{v}$. Finalmente a terceira integral representa a queda resistiva de tensão ao longo do contorno. Então

os dois primeiros termos somados representam a taxa total de variação do fluxo magnético através de uma superfície que se move com o fluido, ou seja,

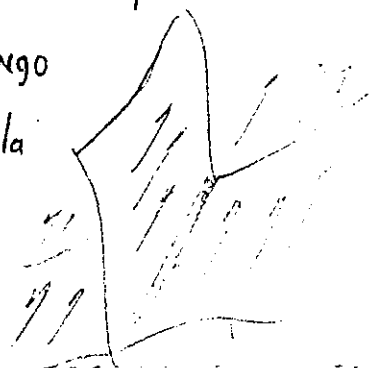


$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint \eta \vec{j} \cdot d\vec{\ell} \quad (= \int \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{S})$$

Se desprezarmos a resistividade do plasma (MHD ideal), considerando-o um fluido condutor perfeito, obtemos

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0}$$

Esta equação significa que o fluxo magnético através de qualquer superfície no plasma permanece constante durante o movimento. Consideremos duas superfícies que sejam sempre tangentes ao campo no instante $t=0$. Suponhamos que elas se interseccionam ao longo de uma linha de fluido que, por construção é paralela a $\vec{B}$. Quando o fluido se move, o fluxo através das superfícies tem que continuar sendo nulo



16.
e a interseção continuará sendo uma linha paralela a $\vec{B}$. Neste caso, não existe nenhuma contradição em supor que esta linha é a linha de força original e dizer que a linha de campo é ligada ou congelada ao fluido.

Tensor Tensão Magnética

Num plasma, a interação entre o campo magnético e a densidade de corrente cria uma força que atua sobre o fluido. Esta força é dada pela força de Lorentz

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (\vec{f}: \text{densidade de força : força/volume})$$

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (\nabla \cdot \vec{B} = 0)$$

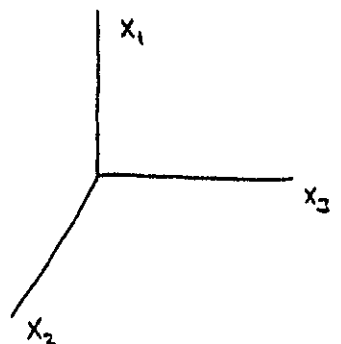
Esta densidade de força pode ser expressa como a divergência de um tensor, o tensor tensão magnética. Para verificar esta possibilidade, vamos utilizar um sistema de coordenadas cartesianas qualquer.

Então temos:

$$f_1 = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B})_2 B_3 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B})_3 B_2$$

$$= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \right) B_3 - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) B_2$$

$$f_1 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{B_3}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_3} + \frac{B_2}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_2}$$



$$f_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_3} B_3 - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_3}{\partial x_1} B_3 + \frac{B_1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} B_2 - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} B_2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x_3} B_3$$

Calculando as outras componentes e somando, temos na forma vetorial

$$\vec{f} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

ou

$$\vec{f} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B}) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0}$$

↑
díada

$$\vec{B} \vec{B} = \begin{bmatrix} B_1 B_1 & B_1 B_2 & B_1 B_3 \\ B_2 B_1 & B_2 B_2 & B_2 B_3 \\ B_3 B_1 & B_3 B_2 & B_3 B_3 \end{bmatrix}$$

Usando o tensor unitário $\vec{\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, podemos escrever

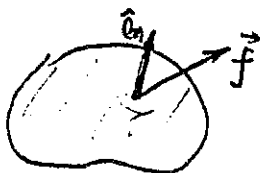
a densidade de força como

$$\boxed{\vec{f} = \nabla \cdot \vec{T}}$$

onde $\vec{T}$ é o tensor tensão magnética:

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{B} \vec{B}}{\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{\delta}}$$

A vantagem de escrever $\vec{f}$ como a divergência de um tensor fica clara quando queremos calcular a força magnética total $\vec{F}$ atuando num determinado volume do plasma



$$\vec{F} = \int \vec{f} dV = \int_{vol} \nabla \cdot \vec{T} dV$$

Usando o teorema de Gauss, temos

$$\vec{F} = \int_S \hat{e}_n \cdot \vec{T} dS$$

onde S é a superfície que engloba o volume e $\hat{e}_n$ aponta de dentro do volume para fora. É bom notar que a ordem do produto escalar $\hat{e}_n \cdot \vec{T}$ tem que ser mantida ($\hat{e}_n \cdot \vec{T} \neq \vec{T} \cdot \hat{e}_n$). Da expressão acima verifica-se que os elementos de $\vec{T}$ têm a dimensão de força/área.

Exemplo:

$$\vec{B} = B \hat{e}_z$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} -\frac{B^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B^2}{2\mu_0} \end{bmatrix}$$

força exercida na superfície xy :

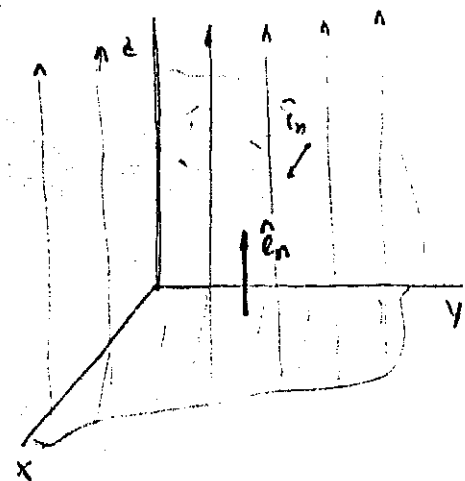
$$\hat{e}_n = \hat{e}_z = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\hat{e}_n \cdot \vec{T} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2/2\mu_0 \end{bmatrix} = \frac{B^2}{2\mu_0} \hat{e}_z$$

$$\vec{F} = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dx dy \hat{e}_z$$

na superfície yz : $\hat{e}_n = \hat{e}_x \Rightarrow \hat{e}_n \cdot \vec{T} = -\frac{B^2}{2\mu_0} \hat{e}_x$

$$\vec{F} = -\int \frac{B^2}{2\mu_0} dy dz \hat{e}_x$$



Nós podemos também definir um tensor tensão total (magnético mais cinético) incluindo a força devido a ∇p em $\nabla \cdot \vec{T}$. A densidade de força total fica

$$\vec{f} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} = \nabla \cdot \vec{T} - \nabla p = \nabla \cdot (\vec{T} - p\vec{\delta}) = \nabla \cdot \vec{S}$$

onde

$$\vec{S} = \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0} - \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) \vec{\delta}$$

Equilíbrio MHD

Nós vamos agora estudar o equilíbrio de plasmas confinados magneticamente. No estudo do equilíbrio nos desprezamos o efeito da resistividade (MHD ideal) e consideramos somente situações estacionárias $\vec{v} = 0$. Existem, no entanto, situações importantes em que uma velocidade de equilíbrio é mantida por fontes externas; por exemplo, no caso de injeção de partículas neutras em plasmas. Neste caso o problema de equilíbrio se torna bastante complicado e ainda é motivo de pesquisa.

Considerando $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $\vec{v} = 0$; $\eta = 0$, as equações que descrevem o equilíbrio MHD ideal ficam

$$\begin{aligned} \nabla p &= \vec{j} \times \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

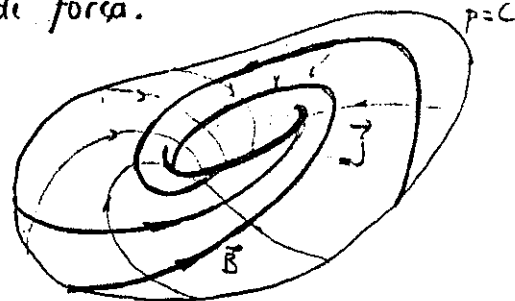
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ; \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Destas equações obtemos

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 ; \vec{j} \cdot \nabla p = 0,$$

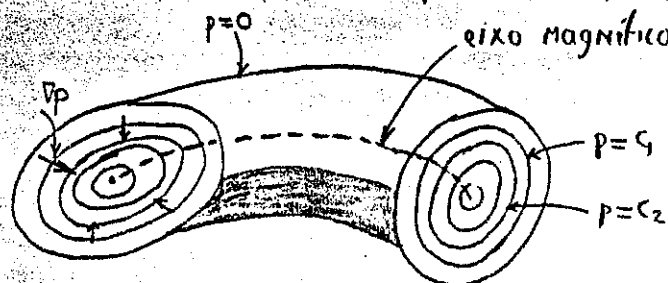
que significam que o campo magnético e a densidade de corrente têm que ser sempre perpendicular ao gradiente de pressão. A solução mais geral destas equações pode ser visualizada da seguinte forma. Como a pressão p é uma quantidade escalar que varia no espaço, a curva $p = \text{const}$ tem que definir uma superfície simples fechada, caracterizada pelo valor da constante C . O gradiente de pressão é sempre normal a esta superfície e nenhuma linha de $\vec{B}$ ou $\vec{j}$ a cruza. Podemos portanto dizer, de forma equivalente, dizer que as superfícies $p = \text{const}$ são formadas por linhas de força.

Como qualquer superfície $p = \text{const.}$ divide o espaço em duas regiões, fora e dentro, vemos que todas estas superfícies devem ser topologicamente um toróide.



Notem, no entanto, que $\vec{j} \cdot \vec{B}$ e $\vec{j} \times \vec{B}$ não se anulam; portanto as linhas de $\vec{B}$ e $\vec{j}$ se interseccionam formando um ângulo qualquer. Embora p seja constante nas superfícies formadas pelas linhas de força, denominadas superfícies magnéticas, o valor de ∇p varia nestas superfícies.

Uma configuração de equilíbrio magnético é portanto, uma configuração em que $\vec{j}$ e $\vec{B}$ são arranjados de forma que $\vec{j} \times \vec{B}$ aponte para dentro do plasma, ou seja, a pressão aumenta à medida que se penetra no plasma. Então dentro do torus existem outras superfícies toroidais, como as cascas de uma cebola; a pressão cresce nestas superfícies sucessivas. Se $p=0$ na superfície mais externa, podemos em princípio confinar o plasma separado de qualquer superfície material. Como cada toroide $p=C$ é fechado e como cada contorno $p=C$ é fechado no corte transversal, deve existir uma única linha ligando todos as superfícies e definindo a pressão máxima; esta linha é denominada o eixo magnético.



Um aspecto importante do estudo de equilíbrio MHD é o problema de confinamento de partículas. Quando se calcula uma configuração de confinamento magnético resolvendo as equações de equilíbrio MHD ideal, está se supondo que forças magnéticas confinam as partículas. Mas confinamento permanente de um sistema estático isolado é impossível, porque a indução magnética não pode realizar trabalho sobre as partículas e, portanto, não pode criar um poço de energia potencial onde as partículas fiquem aprisionadas.

Somente um equilíbrio quase-estático entre gradiente de pressão, corrente, e indução pode ser estabelecido durante um tempo finito.

Desta forma o plasma deve ser reposto de alguma maneira. O tempo de reposição não pode ser calculado das equações de equilíbrio porque depende dos processos de transporte. Uma conclusão importante sobre o transporte pode ser obtida

das equações de equilíbrio. O fluxo de partículas em processos de transporte é, de acordo com a lei de Fick, da forma

$$\vec{\Gamma} = -D \nabla p$$

com um coeficiente de difusão D apropriado para cada espécie de partícula. No entanto, das equações de equilíbrio temos $\vec{j} \cdot \nabla p = 0$. Portanto as partículas negativas e positivas tem que se mover juntas; a corrente é nula mas o transporte de massa é diferente de zero, ou seja, o equilíbrio MHD só é consistente com transporte ambipolar.

Equação de Equilíbrio para Sistemas Cilíndricos

Consideremos um sistema cilíndrico, em que as grandezas de equilíbrio só dependam da variável r . Usando coordenadas cilíndricas r, θ, z , temos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = 0$$

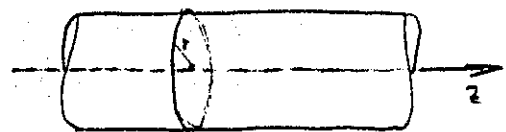
$$B_r = \frac{\text{const}}{r} \Rightarrow B_r \rightarrow \infty \text{ quando } r \rightarrow 0 \therefore \text{const} = 0 : \boxed{B_r = 0}$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \boxed{j_r = 0}$$

$$\vec{j} = j_\theta(r) \hat{i}_\theta + j_z(r) \hat{i}_z$$

$$\vec{B} = B_\theta(r) \hat{i}_\theta + B_z(r) \hat{i}_z$$

$$\therefore \vec{j} \times \vec{B} = (j_\theta B_z - j_z B_\theta) \hat{i}_r = \frac{dp}{dr} \hat{i}_r$$



como o campo deve ser finito em todo o espaço, inclusive no eixo magnético, devemos reter a de $C=0$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Da lei de Ampère, temos

$$\frac{dB_z}{dr} = -\mu_0 j_\theta ; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \mu_0 j_z$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{\mu_0} B_z \frac{dB_z}{dr} - \frac{B_\theta}{r \mu_0} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = -\frac{d}{dr} \frac{B_z^2}{2\mu_0} - \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{B_\theta^2}{r}}$$

termo devido à tensão das linhas de força
equação de equilíbrio para sistemas com simetria cilíndrica.

Notem que esta equação poderia ser derivada diretamente do tensor tensão

$$\vec{S} = \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0} - \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) \vec{e}_0$$

$$\nabla \cdot \vec{S} = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r}, \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{B_r^2}{2\mu_0} - \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - p \right) \hat{r} \hat{r} & \frac{B_r B_\theta}{\mu_0} \hat{r} \hat{\theta} \\ \frac{B_\theta B_r}{\mu_0} \hat{\theta} \hat{r} & \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_r^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - p \right) \hat{\theta} \hat{\theta} \\ \frac{B_z B_r}{\mu_0} \hat{z} \hat{r} & \frac{B_z B_\theta}{\mu_0} \hat{z} \hat{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{B_r B_z}{\mu_0} \hat{r} \hat{z} \\ \frac{B_\theta B_z}{\mu_0} \hat{\theta} \hat{z} \\ \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} - \frac{B_r^2}{2\mu_0} - \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - p \right) \hat{z} \hat{z} \end{bmatrix}$$

O produto escalar de ∇ pelo tensor $\vec{S}$ tem que ser feito calculando inicialmente as derivadas de todos os seus termos. Para calcular essas derivadas, temos que lembrar que em coordenadas cilíndricas os vetores $\hat{i}_\theta$ e $\hat{i}_r$ variam com θ :

$$\frac{\partial \hat{i}_r}{\partial \theta} = \hat{i}_\theta ; \quad \frac{\partial \hat{i}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{i}_r ; \quad \frac{\partial \hat{i}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{i}_\theta}{\partial r} = 0 \quad (\hat{i}_\pm \text{ é constante})$$

Calculando cada termo temos:

$$\hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[-\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) \hat{i}_r \hat{i}_r \right] = \hat{i}_r \cdot \left[-\hat{i}_r \hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) \right] = -\hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right)$$

$$\hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) \hat{i}_\theta \hat{i}_\theta \right] = \hat{i}_r \cdot \underbrace{\left[\hat{i}_\theta \hat{i}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) \right]}_{=0} = 0$$

$$\hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[\frac{B_\theta B_z}{\mu_0} \hat{i}_\theta \hat{i}_z \right] = \hat{i}_r \cdot \underbrace{\left[\hat{i}_\theta \hat{i}_z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta B_z}{\mu_0} \right) \right]}_{=0} = 0$$

$$\hat{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left[-\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) \hat{i}_r \hat{i}_r \right] = \hat{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \left[-\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) (\hat{i}_\theta \hat{i}_r + \hat{i}_r \hat{i}_\theta) \right] = -\frac{1}{r} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) \hat{i}_r$$

$$\hat{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left[\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) \hat{i}_\theta \hat{i}_\theta \right] = \hat{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \left[\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) (-\hat{i}_r \hat{i}_\theta - \hat{i}_\theta \hat{i}_r) \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) \hat{i}_r$$

Todas as outras componentes são nulas; portanto obtemos

$$\nabla \cdot \vec{S} = - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} + P \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} - P \right) \right] \hat{i}_r$$

$$\nabla \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + P \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0}$$

que é a mesma equação de equilíbrio obtida anteriormente. Note que duas grandezas são arbitrárias na equação de equilíbrio.

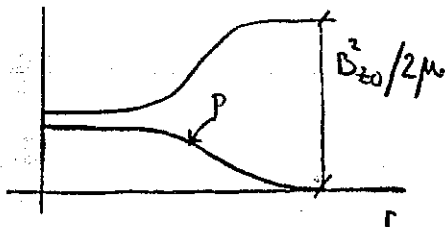
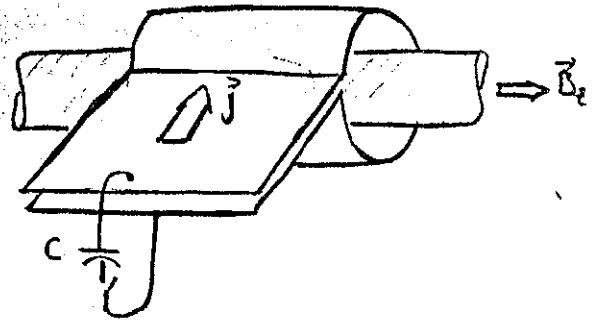
Casos especiais

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 B_\theta^2}{2\mu_0} \right)$$

1. Theta-pinch

$$B_z = 0$$

$$\therefore p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} = \text{const} \quad \text{ou} \quad (\beta + 1) \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} = \text{const}$$



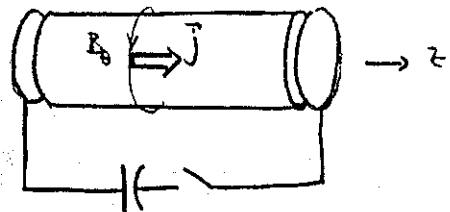
$$\beta = \frac{p}{B_\theta^2/2\mu_0}$$

2. Z-pinch

$$B_z = 0$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = - \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{1}{r} \frac{B_\theta^2}{r}$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{B_\theta^2}{2\mu_0})$$



- i) modelo de fronteira abrupta: $r < a: p = p_0 = \text{const}$
 $r > a: p = 0$

$$\therefore r < a: r^2 \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} = C \Rightarrow B_\theta^2 = \frac{2\mu_0 C}{r^2}; \text{ para evitar divergência em } r \rightarrow 0 \text{ temos } C = 0$$

$$r > a: B_\theta^2 = \frac{2\mu_0 C}{r^2} \therefore B_\theta = \frac{\text{const.}}{r}$$

Para calcular a constante, temos que resolver o problema de contorno na fronteira. Integrando a equação de equilíbrio no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, temos

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) dr = - \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} dr$$

$$\therefore \left[p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right]_{a-\delta}^{a+\delta} = - \frac{1}{\mu_0} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{B_\theta^2}{r} dr$$

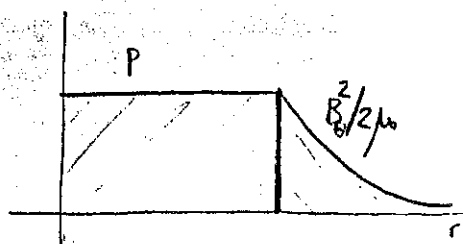
Vamos supor que B_θ tenha uma variação suave entre $a-\delta$ e $a+\delta$:

$$B_\theta = C' \left[1 - \frac{r}{a-\delta} \right]^\alpha$$

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{B_\theta^2}{r} dr \approx \frac{C'^2}{a} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \left(1 - \frac{r}{a-\delta} \right)^{2\alpha} dr = \frac{C'^2}{a} \left(- \frac{a-\delta}{2\alpha+1} \right) \left(1 - \frac{r}{a-\delta} \right)^{2\alpha+1} \Big|_{a-\delta}^{a+\delta}$$

$$\therefore \frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} - p_0 = - \frac{C'^2}{(2\alpha+1)a} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{a+\delta}{a-\delta} \right)^{2\alpha+1} \right] = 0$$

$$\boxed{\frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} = p_0 \Rightarrow C}$$

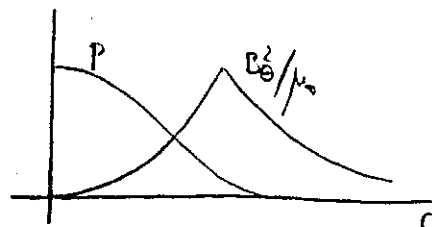


ii) modelo de corrente distribuída : $j_z = \text{const.}$; $r \leq a$; $j_z = \text{const.}$
 $r > a$; $j_z = 0$

$$2\pi r B_\theta = \mu_0 r^2 j_z \quad \therefore B_\theta = \frac{\mu_0 r j_z}{2\pi} = C r ; \quad C = \frac{\mu_0 j_z}{2\pi} ; r < a$$

$$\therefore \frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = - \frac{C^2 r}{\mu_0} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \frac{C^2 r^2}{\mu_0} = - \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}$$

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \right) = 0 \quad \therefore p + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} = \text{const.}$$



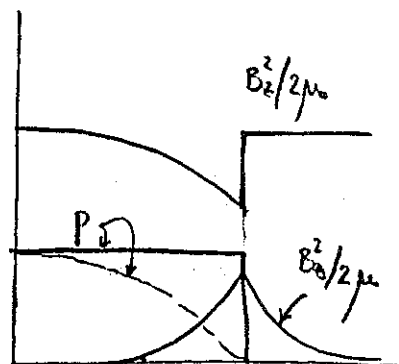
3. Screw-pinch $j_\theta \neq j_z \neq 0$

difuso: significa que j_z é distribuída sobre toda a coluna de plasma

Se $j_z = \text{const}$ para $r < a$, podemos, como no caso anterior incluir $\frac{B_\theta^2}{r}$ na derivada, e obtemos

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} + \frac{B_\theta^2}{\mu} \right) = 0 \quad ; \quad j_z = \text{const}$$

No screw-pinch o plasma pode ser diamagnético ou paramagnético.



O screw-pinch é geralmente utilizado como um modelo para uma coluna toroidal de plasma de grande razão de aspecto. Para isso se supõe que a coluna de plasma periódica na direção z , com período $2\pi R$, onde R é o raio maior da coluna de plasma equivalente. Se considerarmos uma linha de força numa superfície $r = \text{constante}$, podemos definir a inclinação local da linha de força como

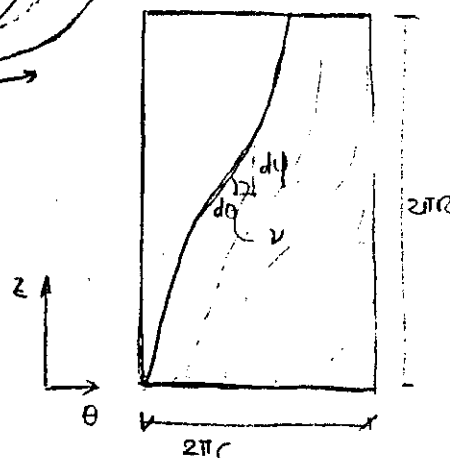
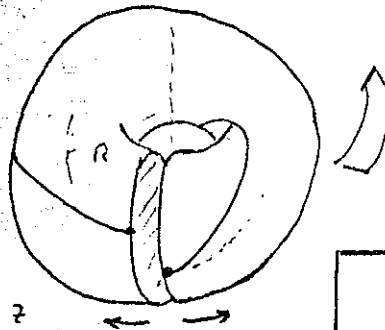
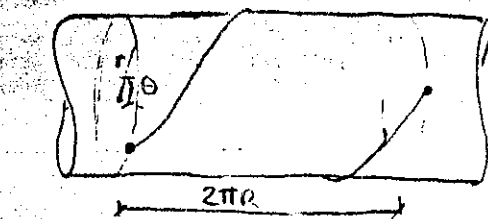
$$\nu = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\text{ao longo de uma linha de força}}$$

onde ϕ é um ângulo 'toroidal', $\phi = \frac{z}{R}$

Então a inclinação média das linhas de força será

$$q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{r=\text{const}} \nu d\theta$$

Esta grandeza é denominada fator de segurança



porque desempenha o papel de um limite de segurança para estabilidade de modos de dobra (kink modes)

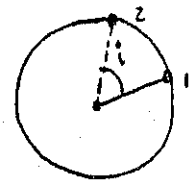
No caso das grandezas de equilíbrio só dependerem de r , temos que ao longo de uma linha de força:

$$\frac{dz}{B_z(r)} = \frac{r d\theta}{B_\theta(r)} \quad \therefore \quad \frac{R d\psi}{B_z} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{r B_z}{R B_\theta} \quad \Rightarrow \quad q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{r B_z}{R B_\theta}}_{\text{função só de } r} d\theta = \frac{r B_z}{R B_\theta}$$

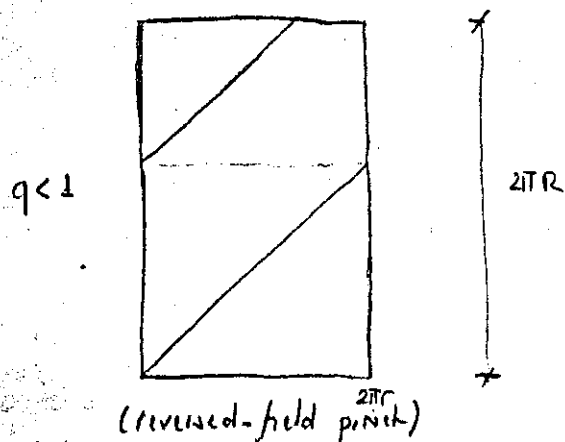
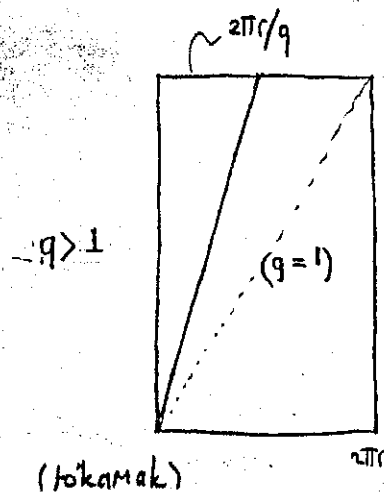
$$q(r) = \frac{r B_z(r)}{R B_\theta(r)}$$

Quando a linha de força chegar ao término da coluna de plasma, o ângulo formado pela projeção de sua interseção com a seção reta do cilindro e sua posição inicial é denominado i , ou seja, i é o ângulo total θ andado na direção poloidal quando a linha anda um ângulo de $\psi = 2\pi$ na direção toroidal. Mas



$$d\theta = \frac{d\psi}{v} \quad \therefore \quad i = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{v}$$

Como v só depende de r , $v = q \quad \therefore \quad i = \frac{2\pi}{q} \quad \therefore \quad \boxed{i = \frac{2\pi}{q}}$



Superfícies racionais são superfícies em que as linhas de força se fecham sobre si mesmas após m revoluções na direção poloidal ($\theta = 2\pi m$) e n revoluções na direção toroidal ($\psi = 2\pi n$), neste caso

$$q = \frac{n}{m} \quad (\text{superfície racional})$$

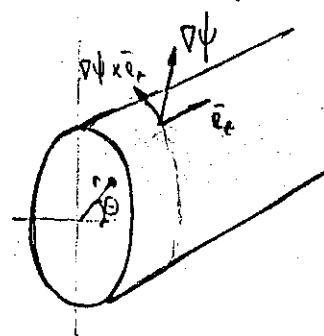
Equilíbrio em Sistemas Cilíndricos com Seção Reta Não-Circular.

Quando a seção transversal da coluna de plasma não é circular, o problema de equilíbrio fica mais complicado porque as grandezas de equilíbrio passam a depender de r e θ . No entanto, uma equação não muito complicada pode ainda ser derivada introduzindo o conceito de função de fluxo magnético, ψ .

A equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ nos permite escrever o campo magnético na forma

$$\vec{B}(r, \theta) = \nabla \psi \times \hat{e}_z + B_z \hat{e}_z$$

onde $\psi = \psi(r, \theta)$ é uma função escalar e $B_z = B_z(r, \theta)$ é a componente longitudinal do campo. Para verificar esta possibilidade basta calcular



$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot [\nabla \psi \times \hat{e}_z] + \nabla \cdot [B_z \hat{e}_z] = \hat{e}_z \cdot [\nabla \times \nabla \psi] - \nabla \psi \cdot [\nabla \times \hat{e}_z]$$

$$+ B_z \nabla \cdot \hat{e}_z + \hat{e}_z \cdot \nabla B_z = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \checkmark$$

Da equação de equilíbrio, temos

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad \therefore [\nabla \psi \times \hat{e}_z + B_z \hat{e}_z] \cdot \nabla p = 0$$

$$\therefore \left[-\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r + B_z \hat{e}_z \right] \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow J\left(\frac{p, \psi}{r, \theta}\right) \equiv \begin{bmatrix} \partial p / \partial r & \partial p / r \partial \theta \\ \partial \psi / \partial r & \partial \psi / r \partial \theta \end{bmatrix} = 0$$

Este resultado indica que p é só uma função de ψ :

$$\boxed{p = p(\psi)} \Rightarrow J\left(\frac{p, \psi}{r, \theta}\right) = \frac{dp}{d\psi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = 0;$$

ou seja, ψ pode ser considerado como uma etiqueta para as superfícies magnéticas $p = \text{constante}$.

A equação para ψ pode ser obtida facilmente da lei de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \times [\nabla \psi \times \hat{e}_z + B_z \hat{e}_z] = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \psi (\nabla \cdot \hat{e}_z) - \hat{e}_z \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \psi)}_{\nabla^2 \psi} + (\hat{e}_z \cdot \nabla) \nabla \psi - (\nabla \psi \cdot \nabla) \hat{e}_z + \underbrace{\nabla \times (B_z \hat{e}_z)}_{B_z \nabla \times \hat{e}_z - \hat{e}_z \times \nabla B_z} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = -\mu_0 j_z}$$

$$\hat{e}_z \times \nabla B_z = -\mu_0 \vec{j}_\perp$$

equação de equilíbrio
 $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$

A primeira equação é muito conveniente: basta especificar a densidade de corrente na direção z para calcularmos ψ . No entanto, a densidade de corrente depende dos gradientes de pressão e de B^2 através da equação de equilíbrio e precisamos determinar esta relação. Mas antes, vamos verificar uma consequência importante da equação para $\vec{j}_\perp$.

Da equação de equilíbrio, temos:

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \quad \therefore -\frac{1}{\mu_0} [(\hat{e}_z \times \nabla B_z) + \nabla^2 \psi \hat{e}_z] \cdot \left(\frac{dp}{d\psi} \nabla \psi \right) = 0$$

$$\therefore (\hat{e}_z \times \nabla B_z) \cdot \nabla \psi = 0 \Rightarrow (\nabla \psi \times \nabla B_z) \cdot \hat{e}_z = 0 \Rightarrow f\left(\frac{B_z}{r, \theta}\right) = 0,$$

ou seja, $B_z = B_z(\psi)$ como para a pressão.

Finalmente podemos calcular a expressão para j_z da equação de balanço de pressão

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} = (j_z \hat{e}_z - \frac{1}{\mu_0} \hat{e}_z \times \nabla B_z) \times \vec{B}$$

$$\nabla p = j_z \hat{e}_z \times \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} [(\hat{e}_z \times \nabla B_z) \times \vec{B}]$$

$$\nabla p = j_z [\hat{e}_z \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z + B_z \hat{e}_z)] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{B} \cdot \nabla B_z) \hat{e}_z - (\vec{B} \cdot \hat{e}_z) \nabla B_z]$$

$$= j_z \left[\underbrace{(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)}_{=1} \nabla \psi - \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \nabla \psi)}_{=0} \hat{e}_z \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B} \cdot \nabla \psi) \frac{dB_z}{d\psi} \hat{e}_z - B_z \frac{dB_z}{d\psi} \nabla \psi \right]$$

$$\nabla p = j_z \nabla \psi - \frac{1}{2\mu_0} \frac{dB_z^2}{d\psi} \nabla \psi$$

$$\nabla \psi \left[\frac{dp}{d\psi} + \frac{d}{d\psi} \frac{B_z^2}{2\mu_0} = j_z \right] \quad \therefore \quad j_z = \frac{d}{d\psi} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right)$$

Então as equações para um equilíbrio cilíndrico variando em duas dimensões ficam

$$\nabla^2 \psi = -\mu_0 j_z \quad ; \quad \psi = \psi(r, \theta)$$

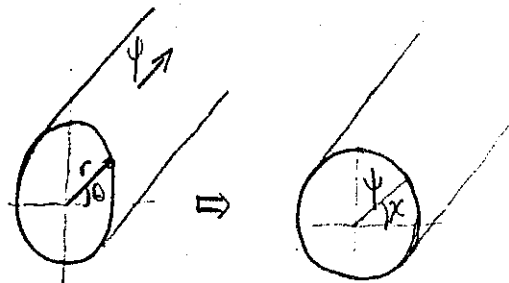
$$j_z = \frac{d}{d\psi} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) \quad ; \quad \vec{j}_\perp = \frac{1}{\mu_0} \nabla B_z \times \hat{e}_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{d\psi} \nabla \psi \times \hat{e}_z$$

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \hat{e}_z + B_z \hat{e}_z$$

A função de fluxo pode ser considerada uma variável que enumera as superfícies magnéticas. Podemos então introduzir uma variável angular, que vamos denominar χ , que seja ortogonal a ψ e ϕ . Vamos supor que esta variável varie de 0 a 2π quando damos uma volta completa na seção transversal da coluna de plasma.

A equação que determina esta variável é dada pela condição de ortogonalidade:

$$\nabla\psi \cdot \nabla\chi = 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} = 0$$



Conhecendo-se $\psi(r, \theta)$ podemos em princípio resolver a equação para calcular $\chi(r, \theta)$. No entanto, nem sempre a solução desta equação pode ser obtida facilmente, mesmo por métodos numéricos. Então fazemos a transformação de variáveis

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (\psi, \chi, \phi) \quad (\phi = z/R)$$

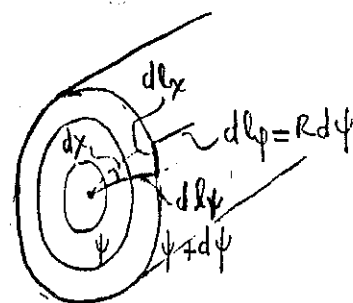
O Jacobiano da transformação (ver Jeffery & Jeffery, p. 132) é dado por

$$dV = R r dr d\theta d\phi = R J d\psi d\chi d\phi \Rightarrow \frac{r}{J} = \begin{vmatrix} \partial\psi/\partial r & \partial\psi/\partial\theta \\ \partial\chi/\partial r & \partial\chi/\partial\theta \end{vmatrix}$$

Outra forma de ver a transformação de coordenadas é calcular as métricas das coordenadas ψ, χ e ϕ :

$$dV = h_\psi h_\chi h_\phi d\psi d\chi d\phi$$

$$d\ell_\phi = R d\phi \therefore \boxed{h_\phi = R}$$



$$\vec{B} = \nabla\psi \times \hat{e}_z + B_\chi \hat{e}_\chi \therefore |B_\chi| = |\nabla\psi| \quad ; \quad d\psi = \nabla\psi d\ell_\psi = B_\chi d\ell_\psi$$

$$\therefore dl_x = \frac{1}{B_x} d\psi \quad \therefore \boxed{h_\psi = \frac{1}{B_x}}$$

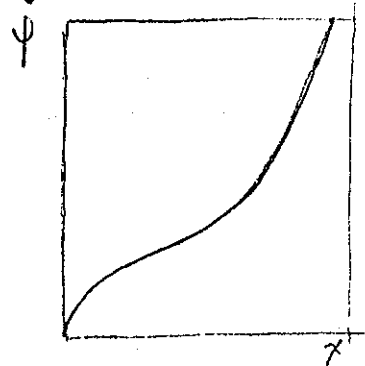
Finalmente, como

$$dV = h_\psi h_x h_\phi d\psi dx d\phi = R \int d\psi dx d\phi$$

temos $\boxed{h_x = \int B_x}$

Com as coordenadas (ψ, x, ϕ) podemos generalizar a nossa definição de q . Nas coordenadas ψ e x (que são coordenadas angulares), a inclinação local das linhas de força fica

$$v(\psi, x) = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{\text{ao longo de uma linha de força}}$$



Portanto a inclinação média fica dada por

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi=\text{const}} v dx$$

Mas a equação das linhas de força nessas coordenadas é dada por

$$\frac{h_\psi d\psi}{B_z} = \frac{h_x dx}{B_x} \quad \therefore \frac{d\psi}{dx} = \frac{h_x B_\phi}{h_\psi B_x} = \frac{\int B_x B_\phi}{h_\psi B_x}$$

$$\boxed{q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi} \frac{B_z}{R} \int dx}$$

Para calcular esta integral, felizmente não é necessário se determinar o Jacobiano. Primeiro notamos que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

Mas como a integral é feita ao longo de $\psi = \text{const.}$

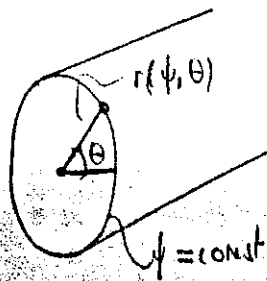
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = 0 \Rightarrow dr = - \frac{\partial \psi / \partial \theta}{\partial \psi / \partial r} d\theta$$

$$\therefore dx = \underbrace{\left[- \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]}_{r\gamma^{-1}} \frac{d\theta}{\partial \psi / \partial r}$$

$$\therefore \int dx = \frac{r d\theta}{\partial \psi / \partial r}$$

$$q(\psi) = \frac{B_z(\psi)}{2\pi R} \int_{\psi_0}^{2\pi} \frac{r d\theta}{\partial \psi / \partial r}$$

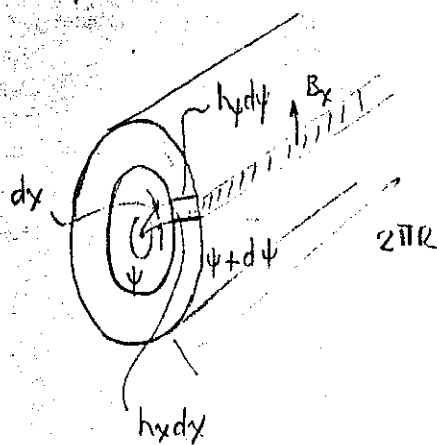
Como a integral é feita numa superfície $\psi = \text{constante}$, temos que considerar $r = r(\psi, \theta)$ no integrando.



Finalmente vamos determinar uma expressão mais geral para q que permaneça válida em sistemas toroidais.

Consideremos duas superfícies magnéticas ψ e $\psi + d\psi$. O fluxo magnético na direção z é dado por

$$d\phi_z = \iint B_z h_x dx h_\psi d\psi$$



Por outro lado, o fluxo na direção poloidal (x) através de uma fatia de comprimento $2\pi R$ ao longo do cilindro é dado por

$$d\phi_x = 2\pi R B_x h_\psi d\psi$$

(Não é necessário fazer a integral em z , ou ψ , porque as grandezas de equilíbrio não dependem desta variável)

$$\therefore h_\psi d\psi = \frac{1}{2\pi R B_\phi} d\phi_\chi$$

$$\therefore d\phi_z = \iint B_z \cancel{f} B_\chi \frac{d\phi_\chi}{2\pi R B_\chi} d\chi \quad \therefore \frac{d\phi_z}{d\phi_\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_\psi \frac{B_z}{R} f d\chi = q$$

$$\boxed{q(\psi) = \frac{d\phi_z}{d\phi_\chi}}$$

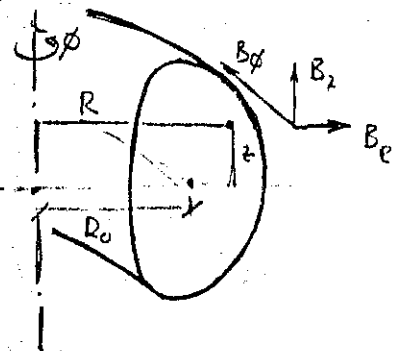
"

Equilíbrio de Sistemas Toroidais. Equação de Grad-Shafranov

Em sistemas toroidais, o problema de equilíbrio MHD fica um pouco mais simples usando a função de fluxo, como no caso do equilíbrio cilíndrico de seção transversal não circular.

A equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ fica, em coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z)

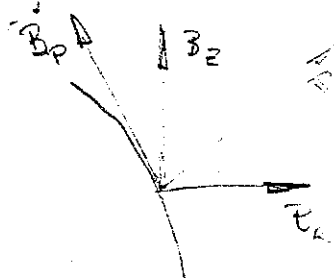
$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$



Vamos introduzir a função fluxo poloidal de forma semelhante ao caso cilíndrico:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{R} [\nabla \psi \times \hat{e}_\phi + R B_\phi \hat{e}_\phi]} = \vec{B}_p + B_\phi \hat{e}_\phi$$

$$\vec{B}_p = B_R \hat{e}_R + B_z \hat{e}_z = \frac{1}{R} \nabla \psi \times \hat{e}_\phi$$

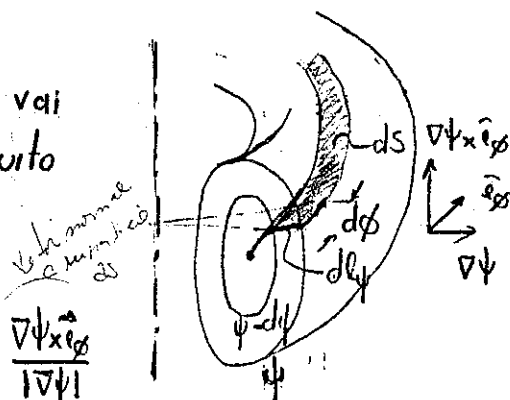


$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla \psi}{R} \times \hat{e}_\phi + B_\phi \hat{e}_\phi \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{e}_z - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_R + B_\phi \hat{e}_\phi \right]$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

A função de fluxo, embora seja só uma função auxiliar, tem um significado simplu, ligado ao fluxo poloidal, como no caso cilíndrico.

Vamos considerar o fluxo do campo poloidal através de uma fatia que vai desde o eixo magnético até um circuito toroidal na superfície $\psi = \text{const.}$:



$$\psi_P = \int \vec{B}_P \cdot d\vec{S} ; d\vec{S} = 2\pi R d\psi \frac{\nabla \psi \times \hat{e}_\phi}{|\nabla \psi|}$$

$$\therefore \psi_P = 2\pi \int_0^\psi \frac{1}{R} [\nabla \psi \times \hat{e}_\phi] \cdot \hat{e}_\phi R d\psi \frac{\nabla \psi \times \hat{e}_\phi}{|\nabla \psi|} = 2\pi \int_0^\psi [|\nabla \psi|^2 \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi - (\nabla \psi \cdot \hat{e}_\phi)(\hat{e}_\phi \cdot \nabla \psi)] \frac{d\psi}{|\nabla \psi|}$$

$$\therefore \psi_P = 2\pi \int_0^\psi \underbrace{|\nabla \psi|}_{d\psi} d\psi = 2\pi \int_0^\psi d\psi = 2\pi \psi \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{\psi_P}{2\pi}}$$

Vamos agora determinar a relação entre ψ e a corrente no plasma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \nabla \times \left[\frac{1}{R} \nabla \psi \times \hat{e}_\phi + B_\phi \hat{e}_\phi \right] = \mu_0 \vec{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \right)$$

$$\therefore \nabla \times \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{e}_z - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_R + B_\phi \hat{e}_\phi \right] = \mu_0 \vec{j}$$

$$\therefore \left[-\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{e}_R - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_\phi - \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{e}_\phi + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_\phi) \hat{e}_z \right] = \mu_0 \vec{j}$$

$$\therefore \frac{1}{R} \left[R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = -\mu_0 j_\phi \therefore \boxed{\Delta^* \psi = -\mu_0 R j_\phi}$$

$$\boxed{\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

A componente poloidal da densidade de corrente fica

$$\mu_0 \vec{j}_p = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{e}_z + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_\phi) \hat{e}_\phi \Rightarrow \boxed{\mu_0 \vec{j}_p = \frac{1}{R} \nabla(R B_\phi) \times \hat{e}_\phi} \quad \approx \text{circula}$$

Da equação de equilíbrio tiramos a relação entre p , B_ϕ e ψ .

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} [\nabla \psi \times \hat{e}_\phi + R B_\phi \hat{e}_\phi] \cdot \nabla p = 0$$

$$\therefore \nabla p \cdot (\nabla \psi \times \hat{e}_\phi) = 0 \Rightarrow \hat{e}_\phi \cdot (\nabla \psi \times \nabla p) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial R} = 0 ;$$

$$\text{ou seja } f(\psi, p) = \frac{\partial(\psi, p)}{\partial(R, z)} = 0 \Rightarrow \boxed{p = p(\psi)}$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} [\nabla(R B_\phi) \times \hat{e}_\phi + R j_\phi \hat{e}_\phi] \cdot \nabla p = 0 ; \quad \nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi$$

$$\therefore \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi \cdot [\nabla(R B_\phi) \times \hat{e}_\phi] = 0 \Rightarrow f(\psi, R B_\phi) = 0 \Rightarrow \boxed{F(\psi) = R B_\phi}$$

Pode-se mostrar que $F(\psi) = -I_p(\psi)/2\pi$ onde $I_p(\psi)$ é a corrente poloidal total que circula entre o eixo magnético e um circuito poloidal na superfície $\psi = \text{const.}$

Finalmente vamos determinar a relação entre j_ϕ , p e F através da equação de equilíbrio:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \Rightarrow \nabla \psi \cdot \nabla p = \nabla \psi \cdot \left[(j_\phi \hat{e}_\phi + \frac{1}{\mu_0 R} \nabla F \times \hat{e}_\phi) \times \frac{1}{R} (\nabla \psi \times \hat{e}_\phi + F \hat{e}_\phi) \right]$$

$$\therefore |\nabla \psi|^2 \frac{dp}{d\psi} = \nabla \psi \cdot \left[\frac{j_\phi}{R} \hat{e}_\phi \times (\nabla \psi \times \hat{e}_\phi) + \frac{F}{\mu_0 R^2} \underbrace{(\nabla F \times \hat{e}_\phi) \times \hat{e}_\phi}_{\frac{dF}{d\psi} (\nabla \psi \times \hat{e}_\phi) \times \hat{e}_\phi} \right]$$

$$\therefore |\nabla \psi|^2 \frac{dp}{d\psi} = \frac{j_\phi}{R} \nabla \psi \cdot \nabla \psi - \frac{F}{\mu_0 R^2} \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi$$

$$j_\phi = R \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2\mu_0 R} \frac{dF^2}{d\psi}$$

Substituindo esta expressão na equação para ψ , obtemos a famosa equação de Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi}$$

Para resolver esta equação, as funções $p(\psi)$ e $F(\psi)$ tem que ser especificadas de forma arbitrária. Esta talvez seja a maior fragilidade do modelo MHD de equilíbrio. No entanto, os parâmetros globais de equilíbrio não dependem fortemente dos perfis, desde que estes sejam escolhidos entre funções bem comportadas que representem resultados experimentais. Naturalmente, para resolver esta equação diferencial temos que impor as condições de contorno adequadas. Vamos supor que o plasma esteja separado de paredes condutoras por um vácuo. No vácuo o campo toroidal é equivalente ao campo produzido por uma bobina toroidal perfeita, ou seja,

$$F = RB_\phi = \text{const.}$$

e a pressão é naturalmente nula. Portanto, a equação para ψ no vácuo fica

$$\Delta^* \psi_v = 0.$$

Na interface plasma-vácuo, as condições de contorno ficam

$$[\hat{n} \cdot \vec{B}] = 0 \quad \therefore \quad \hat{n} \cdot [\nabla \psi_v \times \hat{e}_\phi + F_v \hat{e}_\phi - \nabla \psi \times \hat{e}_\phi + F \hat{e}_\phi] = 0$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \perp \hat{e}_\phi ; \quad \hat{n} \cdot (\nabla \psi \times \hat{e}_\phi) = 0 \Rightarrow [\hat{n} \cdot \vec{B}] = 0 \text{ automaticamente satisfeita.}$$

$$[\hat{n} \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$\therefore [\hat{n} \times (\nabla \psi \times \hat{e}_s + F \hat{e}_s)] = \mu_0 \vec{j}_s \quad \therefore [(\hat{n}, \hat{e}_s) \nabla \psi - (\hat{n} \cdot \nabla \psi) \hat{e}_s + F \hat{n} \times \hat{e}_s] = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$\therefore \boxed{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] = -\mu_0 j_{sp} } \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\psi_b} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\psi_b} \quad \text{quando } j_{sp} = 0, \text{ que é o caso mais usual}$$

$$\boxed{ [F] = \mu_0 j_{sp} }$$

A segunda relação não é na verdade uma segunda condição de contorno, mas determina a componente poloidal da corrente superficial induzida quando permitirmos uma descontinuidade do campo toroidal na superfície do plasma.

Finalmente, do balanço de pressão, temos

$$\left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = 0$$

que determina a descontinuidade no campo (principalmente o toroidal) quando permitirmos uma descontinuidade na pressão.

A função de fluxo no vácuo também tem que satisfazer condições de contorno apropriadas

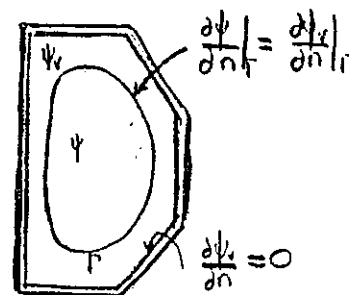
i) equilíbrio dentro de uma concha condutora

Neste caso não pode haver corrente superficial num condutor perfeito e

$$\frac{\partial \psi_v}{\partial n} \Big|_{\text{parede}} = 0$$

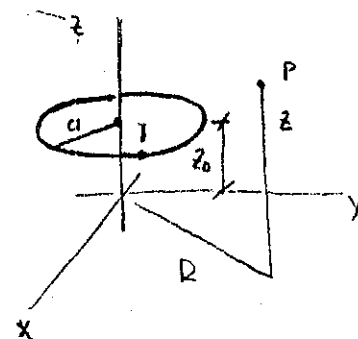
Naturalmente, se supusermos que a parede está em contacto com o plasma, não resolvemos a equação no vácuo e impomos

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\text{parede}} = 0$$



ii) equilíbrio mantido por correntes externas

Este é o problema mais relevante para o cálculo de configurações práticas de equilíbrio, mas é também o mais difícil. Em geral, temos que usar métodos numéricos para resolvê-lo. Os métodos em geral se baseiam na linearidade da equação para ψ_v . Procuramos então uma solução da equação $\Delta^* \psi_v = 0$ supondo uma superposição linear



$$\psi_v = \psi_{v,p} + \psi_{v,e},$$

onde $\psi_{v,p}$ é devido as correntes que circulam no plasma e portanto deve tender para o a função de fluxo do campo de um dipolo quando $R \rightarrow \infty$. $\psi_{v,e}$ é o fluxo devido as correntes externas. Em geral estas correntes circulam em bobinas circulares concêntricas com o eixo de simetria do toro, e a componente ϕ do potencial vetor, $A_\phi = \psi/R$, de uma bobina de raio a situada no plano $z = z_0$, carregando uma corrente I é conhecido (Stratton, problema 3, página 262)

$$A_\phi(R, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sqrt{a/R}}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right],$$

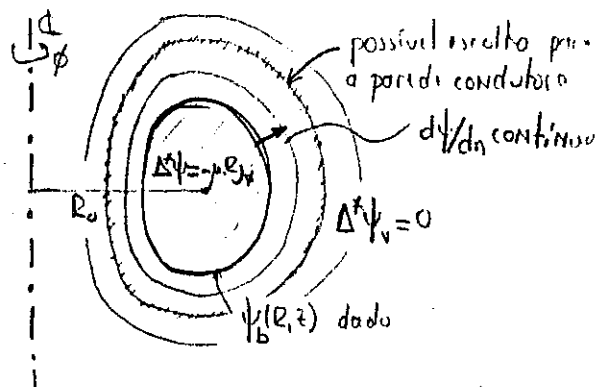
onde

$$k^2 = \frac{4aR}{[(a+R)^2 + (z-z_0)^2]}$$

e $K(k)$ e $E(k)$ são as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies, respectivamente. A combinação linear destas duas soluções deve satisfazer as condições de contorno apropriadas na interface plasma-vácuo. Num problema nós vamos discutir um método para calcular este tipo de solução

Há ainda um outro aspecto importante com relação as condições de contorno da equação de Grad-Shafranov. Como ela é uma equação elíptica, tem que ser resolvida num domínio limitado por uma curva onde são impostas as condições de contorno. Se por exemplo, considerarmos o equilíbrio dentro de uma concha condutora com uma região de vácuo entre o plasma e a parede, só podemos impor as condições de contorno numa única superfície fixa: a parede. A superfície do plasma tem que ser considerada livre e determinada com a própria solução, de forma que as condições de contorno plasma-vácuo sejam satisfeitas. Este é o chamado problema de fronteira livre, que é não linear.

Uma forma de contornar o problema de fronteira livre, é impor o formato da superfície do plasma e estender a solução no vácuo resolvendo $\Delta^* \psi_v = 0$ impondo somente a condição inicial na derivada normal de ψ na superfície do plasma. Conhecendo-se ψ_v , se coloca uma concha condutora coincidente com uma superfície $\psi_v = \text{const.}$ Esta concha seria então a parede condutora compatível com o formato imposta para a superfície do plasma. O problema com este esquema é que enquanto a equação de Grad-Shafranov é resolvida de forma apropriada no plasma, com condições de contorno externas, a equação no vácuo é, na verdade, resolvida como um problema de valor inicial, com as condições iniciais dadas na superfície do plasma. Esta forma de resolver equações elípticas é mal-condicionada (Hadamard) e leva a singularidades no vácuo que não são reais. No entanto, este problema de fronteira fixa pode ser útil em cálculos preliminares de configurações de equilíbrio e para estudo de estabilidade.



Resumo do problema de equilíbrio

dados: $p(\psi)$; $F(\psi) = RB\phi$

fronteira (fixa, livre com concha condutora, livre com correntes externas)

solução:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi} ; \text{ no plasma}$$

$$\Delta^* \psi_v = 0 ; \text{ No vácuo}$$

$$\psi(R, z)|_{\Gamma} = \psi_v(R, z)|_{\Gamma} \quad (\text{onde } \Gamma \text{ é a fronteira que pode ser desconhecida})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi_v}{\partial n}|_{\Gamma} \quad (p \rightarrow 0 \text{ em } \Gamma, \text{ que é o caso mais interessante})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ na parede condutora ou condições apropriadas para correntes externas}$$

resultado: $\psi(R, z) \Rightarrow$

$$p(R, z) = p(\psi(R, z))$$
$$B_{\phi}(R, z) = \frac{1}{R} F(\psi(R, z))$$

$$\vec{B}_p(R, z) = \frac{1}{R} \nabla \psi \times \hat{e}_{\phi} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{e}_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_R \right]$$

$$\vec{j}_{\phi}(R, z) = R \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2\mu_0 R} \frac{dF^2}{d\psi}$$

$$\vec{j}_p(R, z) = \frac{1}{\mu_0 R} \nabla F \times \hat{e}_{\phi}$$

Nós vamos ter oportunidade de resolver este sistema de equações para alguns casos simples.

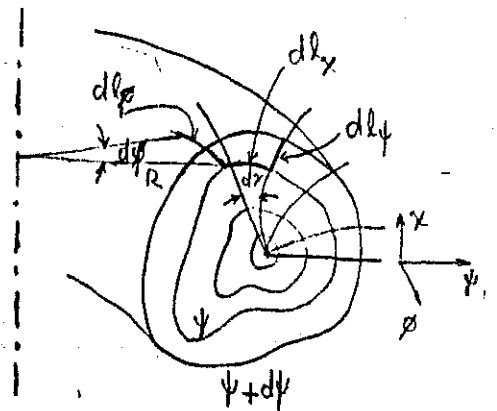
Variáveis de fluxo

Como no caso cilíndrico, podemos introduzir uma coordenada angular χ , perpendicular a ψ , que facilita o cálculo de grandezas de plasma. Isto equivale a fazer a transformação de coordenadas

$$(R, \phi, z) \rightarrow (\psi, \chi, \phi)$$

(Notem que agora é necessário inverter o sentido de ϕ para manter o triângulo direito)

A função coordenada $\chi(R, z)$ é determinada pela condição



$$\nabla\psi \cdot \nabla\chi = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\chi}{\partial R} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\chi}{\partial z} = 0}$$

Para determinar as métricas do sistema (ψ, χ, ϕ) notemos inicialmente que como antes

$$d\phi = R d\phi \Rightarrow h_\phi = R.$$

Por outro lado, vimos que ψ é o fluxo poloidal dividido por 2π , portanto

$$d\psi = \frac{d\psi_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (2\pi R d\phi) B_\chi = R B_\chi d\phi \therefore d\phi = \frac{1}{R B_\chi} d\psi,$$

ou seja

$$h_\psi = \frac{1}{R B_\chi} = \frac{1}{|\nabla\psi|}$$

Para encontrar a métrica de χ , usamos novamente o elemento de volume:

$$dV = R dR d\psi dz = \int d\psi dx d\psi = h_\psi h_x h_\psi d\psi dx d\psi$$

$$\therefore \frac{R}{J} = \begin{bmatrix} \partial\psi/\partial R & \partial\psi/\partial z \\ \partial x/\partial R & \partial x/\partial z \end{bmatrix}$$

Por outro lado

$$J = h_\psi h_x h_\psi \therefore h_x = \frac{J}{h_\psi h_\psi} \therefore h_x = J B_x$$

Transformada rotacional

Definimos a transformada rotacional exatamente como no caso cilíndrico:

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\psi}{dx} \Big|_{\text{ao longo de uma linha de força}} dx$$

A equação da linha de força é dada por

$$\frac{h_x dx}{B_x} = \frac{h_\psi d\psi}{B_\psi}$$

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_\psi J B_x}{B_x R} dx = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_\psi J}{R} dx$$

ou, como $F(\psi) = R B_\psi$

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{J B_\psi}{R} dx = \frac{F(\psi)}{2\pi} \oint \frac{J dx}{R^2}$$

Parâmetros globais

As definições dos parâmetros globais de plasma não é padrão e existe alguma discrepância literatura. Vamos inicialmente considerar a definição de $\bar{\beta}$ segundo o Friidberg:

$$\bar{\beta} = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{\langle B_\phi^2 + B_z^2 \rangle}$$

onde a média é definida pela equação

$$\langle p \rangle = \frac{1}{V_0} \int_0^{V_0} p(V) dV = \frac{1}{V_0} \int_{\psi_0}^{\psi_b} p(\psi) \frac{dV}{d\psi} d\psi,$$

em que $V(\psi)$ é o volume da superfície magnética $\psi = \text{const}$ e V_0 é o volume total do plasma. A introdução de V no cálculo da média complica bastante seu cálculo em casos práticos. Mas

$$dV = h_\psi h_x h_\phi d\psi dx d\phi = R (h_\psi h_x d\psi dx) d\phi,$$

onde R varia em cada ponto da superfície do plasma. No entanto, podemos aproximar R por R_0 sem cometer um erro muito grande. Por isso a média é usualmente aproximada por uma média sobre a área S_0 da seção transversal da coluna de plasma:

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{1}{S} \iint p h_\psi h_x d\psi dx}$$

Em alguns artigos se consideram aproximações ainda mais fortes

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\psi_b - \psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_b} p(\psi) d\psi$$

$$(\text{Em geral } \frac{\frac{1}{V_0} \int p dV}{\frac{1}{S_0} \int p ds} < 1,1)$$

Outra aproximação conveniente, do ponto de vista experimental, é calcular separadamente $\bar{\beta}_T$ e $\bar{\beta}_P$ segundo as aproximações

$$\boxed{\bar{\beta}_T = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2}}$$

$$\boxed{\bar{\beta}_P = \frac{8\pi S \langle p \rangle}{\mu_0 I_p^2}},$$

onde B_0 é o campo toroidal no vácuo, na posição do eixo magnético, S é área da seção transversal da coluna de plasma, e I_p é a corrente total no plasma. Esta última expressão sai da relação entre o campo poloidal e a corrente de plasma

$$\oint B_x dx = \mu_0 I_p,$$

de modo que $\bar{\beta}_P$ é relacionado com um campo poloidal médio. Esta definição de $\bar{\beta}_P$ é devida a Shafranov e é usualmente designada como β_I de Shafranov (notar que esta definição para $\bar{\beta}_P$ e para q^* abaixo são um pouco diferentes das adotadas por Frieling)

Finalmente definimos um fator de segurança global para a coluna de plasma, alguns vêem designado q -cilindrico, pela expressão

$$\boxed{q^* = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 I_p R_0}}$$

onde

$$\boxed{e = \frac{\oint dx}{2\pi a}}$$

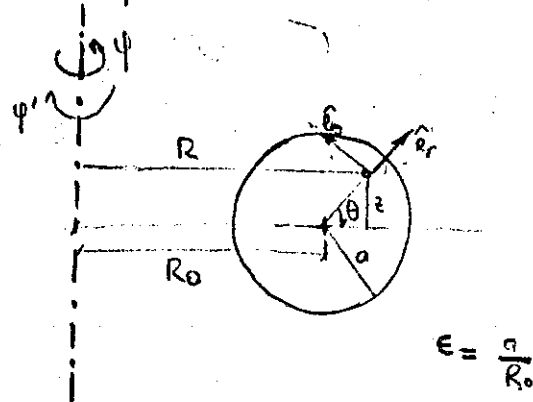
é o perímetro normalizado da coluna de plasma.

Tokamak de Seção Reta Circular.

Solução perturbativa para grande razão de aspecto

$$\frac{R}{a} \gg 1 \quad \text{ou} \quad \epsilon = \frac{a}{R} \ll 1$$

Nós vamos procurar resolver a equação de Grad-Shafranov usando um desenvolvimento em potências de ϵ .



O problema de equilíbrio é dado por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \begin{cases} -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi} & ; \text{no plasma} \\ 0 & ; \text{no vácuo} \end{cases}$$

com a condição de contorno $\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\psi_a} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\psi_a}$, onde ψ_a denota a fronteira plasma-vácuo.

Solução da equação região do plasma

Para procurar uma solução em termos de um desenvolvimento em potências de ϵ , é mais conveniente trabalharmos no sistema de coordenadas pseudo-toroidal indicado na figura

$$\begin{aligned} (R, \psi, z) &\rightarrow (r, \theta, \psi') \Rightarrow \begin{aligned} R &= R_0 + r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \begin{aligned} \hat{e}_R &= \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_z &= \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_z \end{aligned} \\ \psi' &= -\psi \end{aligned}$$

Vamos fazer a transformação da equação de Grad-Shafranov das coordenadas (R, ψ, z) para as coordenadas (r, θ, ψ') com cuidado para evitar alguns erros que são muito comuns.

Temos

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Derivando as duas relações de transformação com relação a R , temos

$$1 = 0 + \frac{\partial r}{\partial R} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial R} r \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial R} = \cos \theta$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial R} \sin \theta + \frac{\partial \theta}{\partial R} r \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$R = r_0 + r \cos \theta$
 $z = r \sin \theta$

Derivando agora com relação a z , temos

$$0 = 0 + \frac{\partial r}{\partial z} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} r \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \sin \theta$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial z} \sin \theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} r \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Dessas relações obtemos

$$\frac{\partial}{\partial R} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Usando estas relações no ^{operador da} ~~na~~ equação de Grad-Shafranov, obtemos

$$\Delta^* \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R_0 + r \cos \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

Para completar as transformações, vamos determinar a expressão para o campo magnético nas coordenadas (r, θ, ψ) :

$$\vec{B} = \frac{1}{R} [\nabla \psi \times \hat{e}_\psi + F \hat{e}_\psi]$$

$$\nabla \psi \times \hat{e}_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{e}_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_R = \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) (\sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_z) -$$

$$- \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_z)$$

$$\begin{aligned}\nabla\psi \times \hat{e}_\varphi &= \left(\cancel{\mu m \theta \omega \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\mu m^2 \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \cancel{\mu m \theta \omega \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\omega^2 \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \hat{e}_r + \\ &\quad \left(\omega^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\mu m \theta \omega \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mu m^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cancel{\mu m \theta \omega \theta}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{R_0 + r \omega \theta} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta + F \hat{e}_\varphi \right]$$

Forma normalizada da equação de Grad-Shafranov:

Quando queremos encontrar a solução de uma equação através do desenvolvimento em potências de um parâmetro pequeno, é conveniente escrever a equação em forma adimensional deixando evidente os termos que dependem do parâmetro. Vamos fazer isto com a equação de Grad-Shafranov.

A função ψ é igual ao fluxo do campo poloidal; então vamos normalizá-la como

$$\psi_{\text{norm}} = \frac{\psi}{\alpha R_0 \bar{B}_p(a)}$$

onde $\bar{B}_p(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}$ e I_p é a corrente total no plasma. As funções $p(\psi)$ e

$F(\psi)$ são normalizadas de forma bem simples:

$$p_{\text{norm}} = \frac{p}{p_0}; \quad F_{\text{norm}} = \frac{F}{R_0 B_0}$$

onde p_0 é a pressão máxima no plasma e B_0 é o campo toroidal no vácuo na posição do eixo magnético ou, de forma equivalente

$$R_0 B_0 = \frac{\mu_0 N I_T}{2\pi}$$

onde I_T é a corrente nas bobinas toroidais e N o número de bobinas toroidais.

A normalização da coordenada radial é trivial:

$$r_{\text{norm}} = \frac{r}{a}$$

Substituindo na equação de Grad-Shafranov, obtemos ($\epsilon = a/R_0$)

$$\frac{a R_0 \bar{B}_p}{a^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]_{\text{norm}} =$$

$$= - \mu_0 R_0^2 (1 + \epsilon r \sin \theta)^2 \frac{p_0}{a R_0 \bar{B}_p} \frac{d p_{\text{norm}}}{d \psi_{\text{norm}}} - \frac{1}{2} \frac{R_0^2 B_0^2}{a R_0 \bar{B}_p} \frac{d F_{\text{norm}}^2}{d \psi_{\text{norm}}}$$

ou, retirando o índice "norm",

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)}_{\text{operador de Laplace } \Delta^2} =$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\beta_{p0} (1 + \epsilon r \sin \theta)^2 \frac{d p}{d \psi} + \frac{P_0^2}{\bar{B}_p^2} \frac{d F^2}{d \psi} \right]$$

onde definimos

$$\beta_{p0} = \frac{2 \mu_0 p_0}{\bar{B}_p^2}$$

A equação na forma normalizada acima se aplica a qualquer configuração toroidal mesmo que a seção reta não seja circular; neste caso a parte representa um raio médio da coluna de plasma ou sua meio largura.

Até este ponto não consideramos nenhuma expansão em termos de ϵ mas daqui por diante iremos considerar explicitamente $\epsilon \ll 1$.

$\epsilon \ll 1$	<u>tokamaks</u>	$\frac{B_0}{\bar{B}_p} \sim \epsilon$	reversed-field pinches	$\frac{B_0}{\bar{B}_p} \sim 1$
		$\beta_{p0} \sim 1$		$\beta_{p0} \sim 1$
		$q^* \sim \frac{a B_0}{R_0 \bar{B}_p} \sim 1$		$q^* \sim \epsilon$

Vemos na equação normalizada que ϵ aparece explicitamente em dois termos da equação. Nós vamos agora utilizar o método perturbativo de Yoshikawa para resolver a equação [S. Yoshikawa, Phys. of Fluids 17, 178 (1974)]. Vamos explicitar a dependência em ϵ no termo fonte da equação escrevendo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon r \omega \theta} \left(\omega \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{r \omega \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -J(\psi) - \epsilon \beta_{p0} r \omega \theta \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \beta_{p0} r^2 \omega^2 \theta \frac{dp}{d\psi}$$

onde

$$J(\psi) = \frac{1}{2} \left(\beta_{p0} \frac{dp}{d\psi} + \frac{E_0^2}{B_p^2} \frac{dF^2}{d\psi} \right)$$

$$\left(J\psi = \frac{E_p}{ap_0} r J(\psi) \right)$$

Procuramos então uma solução na forma

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \epsilon \psi_1(r, \theta) + \dots \quad (\text{se a seção temus não for circular: } \psi_0(r, \theta))$$

Substituindo na equação e comparando potências iguais de ϵ temos

orden ϵ^0

$$\left[\frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} = -J(\psi_0) \right]$$

Especificando as funções $p(\psi)$ e $F^2(\psi)$, podemos resolver esta equação para ψ_0 obtendo a solução em mais baixa ordem.

Pode-se mostrar que esta equação nada mais é do que a equação de equilíbrio cilíndrico:

$$B_\theta = \frac{1}{R_0 + r \omega \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \therefore \quad B_\theta = \frac{a R_0 \bar{B}_p(r_0)}{a R_0} \left[\frac{1}{1 + \epsilon r \omega \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{\text{norm}}$$

$$\therefore \quad B_{\theta \text{ norm}} = \frac{B_\theta}{\bar{B}_p} = \frac{1}{1 + \epsilon r \omega \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \therefore \quad B_{\theta 0} \big|_{\text{norm}} = \frac{d\psi_0}{dr} \big|_{\text{norm}}$$

$$\text{então} \quad \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} = \frac{dB_{\theta 0}}{dr} + \frac{B_{\theta 0}}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\psi_0} \left[\beta_{p0} p + \frac{B_{\theta 0}^2}{B_p^2} F^2 \right] &= \frac{1}{d\psi_0/dr} \frac{d}{dr} \left[\beta_{p0} p + \frac{B_{\theta 0}^2}{B_p^2} F^2 \right] \\ &= \frac{1}{B_{\theta 0}} \frac{d}{dr} \left[\beta_{p0} p + \frac{B_{\theta 0}^2}{B_p^2} F^2 \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dB_{\theta 0}}{dr} + \frac{B_{\theta 0}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{B_{\theta 0}} \frac{d}{dr} \left[\beta_{p0} p + \frac{B_{\theta 0}^2}{B_p^2} F^2 \right]$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\beta_{p0}}{2} p + \frac{B_{\theta 0}^2}{2} + \frac{B_{\theta 0}^2}{B_p^2} \frac{F^2}{2} \right] = -\frac{B_{\theta 0}^2}{r}$$

ou, retornando as variáveis físicas

$$\frac{d}{dr} \left[p + \frac{B_{\theta 0}^2}{2\mu_0} + \frac{B_{\theta 0}^2}{2\mu_0} \right] = -\frac{B_{\theta 0}^2}{r}$$

que é a equação de equilíbrio cilíndrico.

ordem ϵ^1

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - (\omega r \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{\mu \omega \theta}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}) \right] = -(\mathcal{J}(\psi_0 + \epsilon \psi_1) - \mathcal{J}(\psi_0)) - \epsilon \beta_{p0} r \omega \theta \frac{dp}{d\psi} \Big|_0$$

$$\mathcal{J}(\psi_0 + \epsilon \psi_1) - \mathcal{J}(\psi_0) = \epsilon \frac{d\mathcal{J}}{d\psi_0} \psi_1$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi_0} \psi_1 = \omega r \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \beta_{p0} r \omega \theta \frac{dp}{d\psi_0}$$

$$\psi_0 = \psi_0(r) \Rightarrow \frac{d}{d\psi_0} = \frac{1}{d\psi_0/dr} \frac{d}{dr}$$

$\therefore$

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\psi_0} = \frac{1}{d\psi_0/dr} \frac{d\mathcal{J}}{dr} = -\frac{1}{d\psi_0/dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} \right) \right] \frac{\psi_1}{d\psi_0/dr} = \omega \theta \frac{d\psi_0}{dr} - \beta_0 \frac{r}{d\psi_0/dr} \frac{dp}{dr} \cos \theta$$

A clara dependência em $\cos \theta$ leva naturalmente ao ansatz:

$$\psi_1(r, \theta) = U(r) \cos \theta$$

donde vem

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} - \left[\frac{d^3 \psi_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\psi_0}{dr} \right] \frac{U}{d\psi_0/dr} = \frac{d\psi_0}{dr} - \beta_0 \frac{r}{d\psi_0/dr} \frac{dp}{dr}$$

solução da equação homogênea:

$$\frac{d\psi_0}{dr} \left[\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} \right] - \left[\frac{d^3 \psi_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\psi_0}{dr} \right] U = 0$$

$$\therefore U_h(r) = \frac{d\psi_0}{dr}$$

solução particular:

ansatz: $U_p(r) = \frac{d\psi_0}{dr} f(r)$

$$\therefore \frac{dU_p}{dr} = \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} f + \frac{d\psi_0}{dr} \frac{df}{dr}; \quad \frac{d^2 U_p}{dr^2} = \frac{d^3 \psi_0}{dr^3} f + 2 \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} \frac{df}{dr} + \frac{d\psi_0}{dr} \frac{d^2 f}{dr^2}$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{d\psi_0}{dr} \frac{d^2 f}{dr^2} + \left[2 \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} \right] \frac{df}{dr} = \frac{d\psi_0}{dr} - \beta_0 \frac{r}{d\psi_0/dr} \frac{dp}{dr}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(\frac{d\psi_0}{dr} \right)^2 \frac{df}{dr} = \left(\frac{d\psi_0}{dr} \right)^2 - \beta_0 r \frac{dp}{dr}$$

$$r \left(\frac{d\psi_0}{dr} \right)^2 \frac{df}{dr} = \int_0^r \left[r' \left(\frac{d\psi_0}{dr'} \right)^2 - \beta_0 r'^2 \frac{dp_0}{dr'} \right] dr'$$

$$(p_0(r') = p(\psi_0(r')))$$

$$f(r) = \int_0^r dr' \frac{1}{r' \left(\frac{d\psi_0}{dr'} \right)^2} \int_0^{r'} dr'' \left[r'' \left(\frac{d\psi_0}{dr''} \right)^2 - \beta_0 r''^2 \frac{d\psi_0}{dr''} \right]$$

A solução completa da equação de Grad-Shafranov, até termos do ordem de ϵ , fica então

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \epsilon \frac{d\psi_0}{dr} \left\{ A + \int_0^r dr' \frac{1}{r' \left(\frac{d\psi_0}{dr'} \right)^2} \int_0^{r'} dr'' \left[r'' \left(\frac{d\psi_0}{dr''} \right)^2 - \beta_0 r''^2 \frac{d\psi_0}{dr''} \right] \right\} \cos \theta$$

A constante A é determinada pelas condições de contorno. A expressão para $\psi(r, \theta)$ é inteiramente equivalente às equações (6.66) e (6.70) de Freidberg. Para ver isto, basta retornar às variáveis físicas multiplicando r por a , ψ por $1/R_0 B_0$ e β por β_0 ($\beta_0 = 2\mu_0 I_0^2 / B_0^2$); então obtemos

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \left(\frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} \right) \left\{ A + \int_0^r dr' \frac{1}{r' \left(\frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr'} \right)^2} \int_0^{r'} dr'' \left[r'' \left(\frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr''} \right)^2 - 2\beta_0 r''^2 \frac{d\psi_0}{dr''} \right] \right\} \cos \theta$$

onde A , no caso do Freidberg, é determinado de modo que $\psi(r, \theta) = \text{const.}$

Solução no vácuo

A solução da equação $\Delta^* \psi = 0$ não pode ser corretamente derivada através de um desenvolvimento em potências de r/R_0 porque no vácuo temos que permitir $r/R_0 > 1$ para ter as condições de contorno apropriadas quando $r \rightarrow \infty$. A solução da equação será vista numa série de exercícios. No limite $r/R_0 \ll 1$ temos

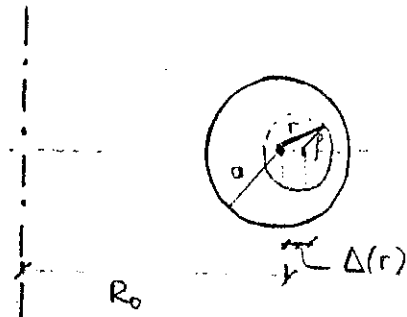
$$\psi_v = d R_0 \left(\ln \frac{r R_0}{r} - 2 \right) + \frac{d}{2} \left[r \left(\ln \frac{r R_0}{r} - 1 \right) + \frac{c_1}{r} + c_2 r \right] \cos \theta$$

onde d , c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas. O fator $(\ln \frac{r R_0}{r} - 1)$ é o termo que se perde quando se busca uma solução perturbativa. No entanto, é um de uma função que tende para zero quando $r/R_0 \rightarrow \infty$.

Aplicação: Equilíbrio Mantido por um Campo Vertical ou por uma Concha Toroidal Condutora

Usando a expressão para $B_{\theta 0}$,

$$B_{\theta 0}(r) = \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr},$$



Vamos escrever a expressão para a função de fluxo na seguinte forma:

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} \left[A + \int_0^r \frac{dr'}{r' B_{\theta 0}^2(r')} \int_0^{r'} dr'' \left\{ r'' B_{\theta 0}^2(r'') - 2\mu_0 r''^2 \frac{dp}{dr''} \right\} \right] \cos \theta$$

(todas as grandezas na forma não normalizada)

Como queremos que a superfície do plasma seja dada por $r=a$, temos que impor $\psi(a, \theta) = \text{constante}$, ou seja,

$$A = - \int_0^a \frac{dr'}{r' B_{\theta 0}^2(r')} \int_0^{r'} dr'' \left[2\mu_0 r''^2 \frac{dp}{dr''} - r'' B_{\theta 0}^2(r'') \right]$$

Substituindo na expressão acima, temos

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} \int_r^a \frac{dr'}{r' B_{\theta 0}^2(r')} \int_0^{r'} dr'' \left[2\mu_0 r''^2 \frac{dp}{dr''} - r'' B_{\theta 0}^2(r'') \right] \cos \theta$$

Notem que esta expressão para $\psi(r, \theta)$ tem a forma

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) - \frac{d\psi_0}{dr} \Delta(r) \cos \theta$$

onde $\Delta(r)$ é dado por

$$\Delta(r) = - \frac{1}{R_0} \int_r^a \frac{dr'}{r' B_{\theta 0}^2(r')} \int_0^{r'} dr'' \left[2\mu_0 r''^2 \frac{dp}{dr''} - r'' B_{\theta 0}^2(r'') \right]$$

Isto significa que, em mais baixa ordem, as superfícies magnéticas são simplesmente círculos cujos centros estão deslocados de $\Delta(r)$ em relação ao centro geométrico da coluna de plasma. Para verificar isto vamos supor que

$$\psi(r, \theta) = f(\rho) \quad ; \quad \rho^2 = (x - \Delta)^2 + y^2 = (r \cos \theta - \Delta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \quad ; \quad \Delta \ll r$$

$$\therefore \rho^2 = r^2 - 2r\Delta \cos \theta + \Delta^2 \quad \therefore \rho = r \left(1 - \frac{\Delta \cos \theta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \right) \simeq r - \Delta \cos \theta$$

Então

$$\psi(r, \theta) = \psi(r - \Delta \cos \theta) \simeq \psi_0(r) - \frac{d\psi_0}{dr} \Delta \cos \theta$$

que possui o forma que indicamos. Note-se que $\Delta(a) = 0$, ou seja, a fronteira do plasma não é deslocada, como não poderia ser por construção.

A solução para ψ no vácuo precisa de ser casada com a solução no vácuo,

$$\psi_v(r, \theta) = dR_0 \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 2 \right) + \frac{d}{2} \left[r \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 1 \right) + \frac{c_1}{r} + c_2 r \right] \cos \theta$$

Antes de impormos as condições de contorno, vamos verificar o comportamento de $\psi_v(r, \theta)$ quando $r \rightarrow \infty$. Como dissemos antes, o termo $(\ln 8R_0/r - 1)$ vem de uma função que tende a zero no limite $r \rightarrow \infty$. Portanto

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_v(r, \theta) \simeq -dR_0 + \frac{d}{2} c_2 r \cos \theta$$

$$B_{\theta v} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} = \frac{d}{2} c_2 \cos \theta$$

$$B_{rv} = -\frac{1}{R_0 r} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} = \frac{d}{2} c_2 \sin \theta$$

$$\vec{B}_{Pv} = B_{\theta v} \hat{e}_\theta + B_{rv} \hat{e}_r = \frac{d}{2} c_2 (\sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta) = \frac{d}{2} c_2 \hat{e}_z,$$

ou seja, o termo c_2 corresponde a um campo vertical constante longe do plasma.

A. Equilíbrio na presença de um campo vertical (sem corrente condutora)

Para determinar as constantes c_1 , c_2 vamos impor as condições de contorno na fronteira plasma-vácuo. Inicialmente temos que impor $\psi(r, \theta) = \text{const}$, ou seja,

$$a \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 1 \right) + \frac{c_1}{a} + c_2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{c_1}{a^2} + c_2 = - \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 1 \right)}$$

Após vamos impor a continuidade da derivada normal de ψ na fronteira plasma-vácuo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_a = \frac{\partial \psi_v}{\partial n} \Big|_a \quad ; \quad \hat{e}_n = \hat{e}_r \quad \therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) - \frac{d\psi_0}{dr} \Delta \cos \theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{dr} = \frac{d\psi_0}{dr} - \frac{d^2\psi_0}{dr^2} \Delta \cos \theta - \frac{d\psi_0}{dr} \frac{d\Delta}{dr} \cos \theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{dr} \Big|_a = \frac{d\psi_0}{dr} \Big|_a \left(1 - \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a \cos \theta \right) \quad (\Delta(a) = 0)$$

$$\frac{d\psi_v}{dr} = d R_0 \frac{r}{8R_0} \left(- \frac{8R_0}{r^2} \right) + \frac{d}{2} \left[\left(\ln \frac{8R_0}{r} - 1 \right) + r \frac{r}{8R_0} \left(- \frac{8R_0}{r^2} \right) - \frac{c_1}{r^2} + c_2 \right] \cos \theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi_v}{dr} \Big|_a = -d \frac{R_0}{a} + \frac{d}{2} \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 2 - \frac{c_1}{a^2} + c_2 \right) \cos \theta$$

Iguando com $\frac{d\psi}{dr} \Big|_a$, temos inicialmente:

$$-d \frac{R_0}{a} = \frac{d\psi_0}{dr} \Big|_a \quad \therefore \quad d = - \frac{a}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} \Big|_a = -a B_{\theta 0}(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi}$$

$$\boxed{d = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi}}$$

$$(2\pi a B_{\theta 0} = -\mu_0 I_p)$$



$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 2 - \frac{c_1}{a^2} + c_2 \right) = - \frac{d\psi}{dr} \Big|_a \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a$$

$$\therefore \ln \frac{8R_0}{a} - 2 - \frac{c_1}{a^2} + c_2 = \frac{2R_0}{a} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a \quad \therefore \boxed{\frac{c_1}{a^2} - c_2 = -2 \frac{R_0}{a} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a + \ln \frac{8R_0}{a} - 2}$$

Combining the two equations for c_1 and c_2 , we obtain

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= a^2 \left(-\frac{R_0}{a} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a - \frac{1}{2} \right) \\ c_2 &= \left(\frac{R_0}{a} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a - \ln \frac{8R_0}{a} + \frac{3}{2} \right) \end{aligned}}$$

Vamos agora calcular a expressão para $\frac{d\Delta}{dr} \Big|_a$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dr} &= \frac{2\mu_0}{R_0 r B_{\theta 0}^2(r)} \int_0^r dr' \left[r'^2 \frac{dp_0}{dr'} - r' \frac{B_{\theta 0}^2(r')}{2\mu_0} \right] \\ &= \frac{2\mu_0}{R_0 r B_{\theta 0}^2(r)} \left[r^2 p_0 - \int_0^r r' dr' \left(2p_0 + \frac{B_{\theta 0}^2}{2\mu_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\Delta}{dr} \Big|_a = - \frac{2\mu_0 a}{R_0 B_{\theta 0}^2(a)} \left[\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p_0(r) (2\pi r dr) + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \frac{B_{\theta 0}^2(r)}{2\mu_0} (2\pi r dr) \right]$$

Vamos definir

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p_0(r) (2\pi r dr) \quad ; \quad \boxed{\beta_p = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\theta 0}^2(a)}}$$

$$\boxed{l_i = \frac{\int_0^a B_{\theta 0}^2(r) (2\pi r dr)}{\pi a^2 B_{\theta 0}^2(a)}} \quad , \text{ indutância interna normalizada (Shafranov).}$$

então

$$\boxed{\frac{d\Delta}{dr} \Big|_a = - \frac{a}{R_0} \left(\beta_p + \frac{l_i}{2} \right) = - \frac{a}{R_0} (\Lambda + 1)}$$

onde Λ é o chamado parâmetro de Shafranov

$$\Lambda = \beta_p + \frac{l_i}{2} - 1$$

Substituindo na expressão para c_1 e c_2 , obtemos

$$c_1 = a^2 \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right); \quad c_2 = - \left(\ln \frac{8R_0}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right)$$

De forma que a função de fluxo no vácuo fica

$$\psi_v = \frac{\mu_0 I}{2\pi} R_0 \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 2 \right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} r \left[\ln \frac{r}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \cos \theta$$

$\left(\frac{r}{R_0} < 1 \right)$

Este resultado tem consequências importantes:

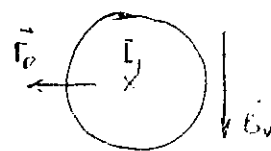
i) campo vertical de equilíbrio:

Vimos que o campo vertical constante que produz parte de ψ_v é dado por

$$B_v = \frac{d}{2} c_2 = - \frac{\mu_0 I_r}{2\pi} \left(\ln \frac{8R_0}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right)$$

$$B_v = - \frac{\mu_0 I_r}{4\pi R_0} \left(\ln \frac{8R_0}{a} + \beta_p + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right)$$

Às vezes esta expressão é apresentada com o sinal positivo; mas não há confusão: o campo vertical tem que ser tal $\vec{F}_R = I_r \vec{l} \times \vec{B}_v$ tem que apontar para o eixo de simetria da máquina



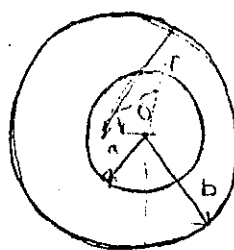
ii) indutância da coluna de plasma

Vimos que a função de fluxo é igual ao fluxo poloidal dividido por 2π . Portanto $\psi_p(a, \theta)$ é igual a 2π vezes o fluxo externo à espira de plasma, ou seja,

$$L = \frac{\phi}{I_p} = \frac{2\pi\psi_p(a, \theta)}{I_p} \quad \therefore \quad \boxed{L_p = \mu_0 R_0 \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 2 \right)}$$

B. Equilíbrio na presença de uma concha condutora

Quando o plasma é circundado por uma concha condutora, digamos de raio b , não podemos interpretar o termo $c_2 r \cos \theta$ como devido a um campo vertical uniforme porque o limite $r \rightarrow \infty$ não é mais acessível. Na verdade, correntes induzidas na concha mantêm o plasma em equilíbrio.



As expressões para d , c_1 e c_2 continuam as mesmas. No entanto, temos que impor a condição

$$\psi_p(r, \theta) \Big|_{\text{parede}} = \text{const}$$

Vamos supor que para se ajustar à parede, haja um deslocamento da coluna de plasma de δ em relação ao centro da parede, ou seja,

$$(x + \delta)^2 + y^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = r^2 + 2r\delta \cos \theta + \delta^2 \quad \Rightarrow \quad r \approx b - \delta \cos \theta \quad \left(\frac{\delta}{b} \ll 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \psi_p(b - \delta \cos \theta) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} R_0 \left[\ln \frac{8R_0}{b} \left(1 + \frac{\delta}{b} \cos \theta \right) - 2 \right] - \frac{\mu_0 I}{4\pi} (b - \delta \cos \theta) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\ln \frac{b}{a} \left(1 - \frac{\delta}{b} \cos \theta \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2 - 2b\delta \cos \theta} \right) \right] \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \psi(b - \delta \omega \Theta) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} R_0 \left[\ln \frac{8R_0}{b} - 2 + \frac{\delta}{b} \omega \Theta \right] - \frac{\mu_0 I}{4\pi} b \left[\ln \frac{b}{a} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right] \omega \Theta + O(\delta^2) \omega^2 \Theta$$

$$\frac{\delta}{b} R_0 - \frac{b}{2} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right] = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\delta}{b} = \frac{b}{2R_0} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\beta_p + \frac{l_i - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right]}$$

Este deslocamento é chamado de deslocamento de Shafranov embora, na realidade, o deslocamento de Shafranov propriamente dito é o deslocamento do eixo magnético com relação ao eixo geométrico da coluna de plasma.

A corrente superficial que é induzida na concha condutora pode ser calculada da condição de contorno

$$\vec{E}_p \times \hat{n} = \mu_0 \vec{j}_s \quad \therefore \quad \frac{1}{R} (\nabla \psi \times \hat{e}_\varphi) \times \hat{n} = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$\therefore -(\hat{n} \cdot \hat{e}_\varphi) \nabla \psi + (\hat{n} \cdot \nabla \psi) \hat{e}_\varphi = \mu_0 \vec{j}_s R \quad \boxed{j_{s\varphi} = \frac{1}{\mu_0 R} \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_s}$$

Como a equação da parede é dada por

$$r^2 + 2r\delta\omega\Theta + \delta^2 = b^2$$

$$\text{temos} \quad \hat{n} = \frac{\nabla(r^2 + 2r\delta\omega\Theta + \delta^2)}{|\nabla(r^2 + 2r\delta\omega\Theta + \delta^2)|} = \frac{2(r + \delta\omega\Theta)\hat{e}_r - 2\delta\omega\Theta\hat{e}_\theta}{4[(r + \delta\omega\Theta)^2 + \delta^2\omega^2\Theta^2]^{1/2}} = \frac{r + \delta\omega\Theta}{L} \hat{e}_r - \frac{\delta\omega\Theta}{L} \hat{e}_\theta$$

$$\therefore \boxed{\hat{n} \approx \hat{e}_r - \frac{\delta}{b} \omega \Theta \hat{e}_\theta}$$

Por outro lado

$$\nabla \psi|_b = \left\{ -\frac{\mu_0 I R_0}{2\pi b} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) + 1 \right] \omega \Theta \right\} \hat{e}_r$$

$$+ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] \omega \Theta \hat{e}_\theta$$

$$j_{sq} \approx \frac{1}{\mu_0 R_0 \left(1 + \frac{b}{R_0} \omega \Theta \right)} \left\{ -\frac{\mu_0 I R_0}{2\pi b} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) + 1 \right] \omega \Theta \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] \frac{\delta}{b} \omega \Theta \right\}$$

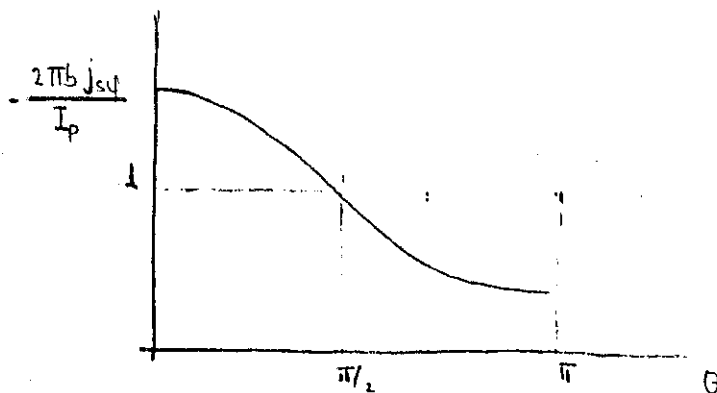
$\frac{1}{2} - \frac{\omega \Theta^2}{2}$

$$j_{sq} \approx -\frac{I_p}{2\pi b} \left\{ 1 + \frac{\delta}{4R_0} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] + \frac{b}{2R_0} \left[\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \right. \right.$$

desprezível

$\left. - 1 \right] \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right\}$

$$j_{sq} \approx -\frac{I_p}{2\pi b} \left\{ 1 + \frac{b}{2R_0} \left[\ln \frac{b}{a} + 1 + \left(\beta_p + \frac{\ell_i - 1}{2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right] \omega \Theta \right\}$$



Na prática, podemos supor que o plasma está sendo mantido por uma concha condutora, calcular j_{sq} e depois substituir j_{sq} por correntes em bobinas discretas que reproduzam o melhor possível esta distribuição.

Soluções exatas da equação de Grad-Shafranov

Muitas vezes, a solução do problema de equilíbrio usando a aproximação $a/R_0 \ll 1$ não é apropriada, como, por exemplo, em tokamaks compactos ou com seção transversal não circular. Neste caso, podemos utilizar algumas soluções exatas da equação de Grad-Shafranov válidas para qualquer valor de a/R_0 . No entanto, estas soluções só são válidas para perfis especiais de $p(\psi)$ e $F(\psi)$ e não podem ser empregadas para qualquer formato da seção transversal da coluna de plasma e nem estendidas para incluir a região externa ao plasma.

Nós vamos considerar duas soluções especiais que são muito usadas. Todas elas são obtidas resolvendo a equação de Grad-Shafranov diretamente nas coordenadas (R, z)

$$\Delta^* \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi}$$

I. Solov'ev: corrente de perfil plano

$$p(\psi) = p_0 - \frac{R_1}{\mu_0} \psi$$

$$F^2(\psi) = (R_0 B_0)^2 + 2 \frac{\tau_{R_1}}{1+\alpha^2} \psi$$

p_0, p_1, τ, α^2 : constantes

A constante na função $F^2(\psi)$ foi escrita nesta forma apenas por conveniência. Então a equação de G-S. fica

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = p_1 R^2 - \frac{\tau_{R_1}}{1+\alpha^2}$$

As soluções da equação homogênea são:

const

R^2

$R^4 - 4R^2 z^2$

$z^6 - 12R^4 z^2 + 8R^2 z^4$

Dois soluções particulares são $(aR^4 + bz^2)$ e $(aR^2 + b)z^2$, onde a e b são constantes. A solução de Solov'ev consiste em combinar as soluções particulares com as da equação homogênea, até quarta ordem. Então tentamos uma solução da forma

$$\psi(R, z) = A [z^2(R^2 - B) + C(R^2 - R_0)^2]$$

onde A , B , C e R_0 são constantes a serem determinadas.

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = A [2z^2R + 4C R(R^2 - R_0^2)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} = A [2z^2 + 4C(R^2 - R_0^2 + 2R^2)] = A [2z^2 + 4C(3R^2 - R_0^2)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 2A(R^2 - B)$$

$$\therefore A [2z^2 + 4C(3R^2 - R_0^2) - 2z^2 - 4C(R^2 - R_0^2) + (R^2 - B)] = \frac{p_1}{1+\alpha^2} [(1+\alpha^2)R^2 - 1]$$

$$2A [(4C + 1)R^2 - B] = \frac{p_1}{1+\alpha^2} [(1+\alpha^2)R^2 - 1]$$

$$\therefore A = \frac{p_1}{2(1+\alpha^2)}; \quad C = \frac{\alpha^2}{4}; \quad B = 1$$

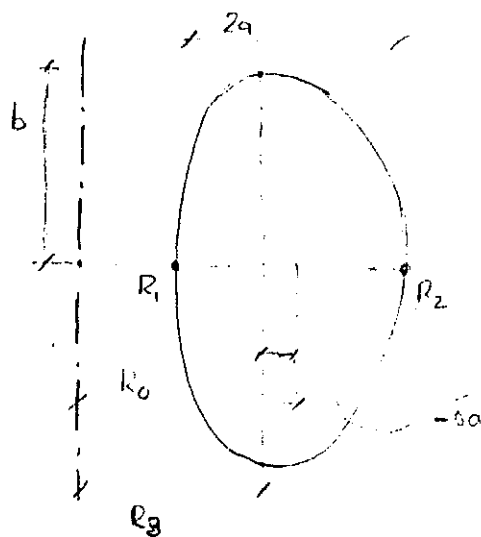
$$\therefore \psi(R, z) = \frac{p_1}{2(1+\alpha^2)} \left[z^2(R^2 - 1) + \frac{\alpha^2}{4}(R^2 - R_0^2)^2 \right]$$

pontos que caracterizam a seção transversal:

$$R_1 = R_0 - a; \quad R_2 = R_0 + a$$

b : altura da seção transversal

R_0 : raio de $z_{\max} = b$



Valor de ψ na fronteira do plasma.

$$p(\psi_s) = 0 \quad \therefore \quad p_0 - \frac{p_1}{\mu_0} \psi_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_s = \frac{\mu_0 p_0}{p_1}}$$

Pontos de estagnação

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \quad \therefore \quad 2Rz^2 + \alpha^2 R(R^2 - R_a^2) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \therefore \quad 2z(R^2 - \tau) = 0$$

Soluções

i) $z = 0$; $R = R_a \Rightarrow R_a$ posição do eixo magnético (que é ligada às outras constantes, como veremos adiante)

ii) $R = \sqrt{\tau}$; $z = \pm \alpha \sqrt{\frac{R_a^2 - \tau}{2}} \Rightarrow$ ponto de estagnação hiperbólico $\rightarrow$ define separatrix

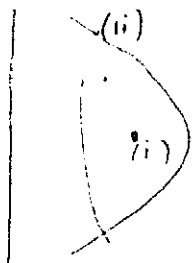
$$\Delta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial R} \right)^2$$

$$\therefore \Delta = [2z^2 + \alpha^2(3R^2 - R_a^2)][2(R^2 - \tau)] - [4Rz]^2$$

$$\therefore \Delta(R = R_a, z = 0) = 4\alpha^2 R_a^2 (R_a^2 - \tau) > 0. \text{ desde que } \boxed{R_a > \sqrt{\tau}}$$

$\therefore$ ponto de estagnação elíptico, o eixo magnético, desde que esta condição seja satisfeita.

$$\Delta(R = \sqrt{\tau}, z^2 = \frac{\alpha^2}{2}(R_a^2 - \tau)) = - \left[4 \frac{\alpha \sqrt{\tau}}{2} \sqrt{R_a^2 - \tau} \right]^2 < 0 : \text{ ponto de estagnação hiperbólico } \Rightarrow \text{ separatrix}$$



Valor da função de fluxo:

i) No eixo magnético: $\psi = 0$

ii) Na separatrix: $\psi = \frac{P_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (\tau - R_a^2)^2$

Como o plasma tem que estar confinado aquém da separatrix, temos que impor a condição

$$\psi_s \leq \frac{P_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (\tau - R_a^2)^2$$

$$\frac{\mu_0 p_0}{P_1} \leq \frac{P_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (\tau - R_a^2)^2$$

$$\boxed{\mu_0 p_0 \leq \frac{\alpha^2 P_1}{8(1+\alpha^2)} (\tau - R_a^2)^2}$$

Portanto, para que a solução de Solov'ev represente um plasma confinado, temos que impor duas condições sobre as constantes: $R_0 > \sqrt{\tau}$ e esta última. No entanto, notem que a constante R_0 ainda é arbitrária.

Contorno:

$$\psi(R_1, 0) = \psi_s = \frac{P_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (R_1^2 - R_a^2)^2 \quad \left. \vphantom{\psi(R_1, 0)} \right\} R_a^2 = \frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$

$$\psi(R_2, 0) = \psi_s = \frac{P_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (R_2^2 - R_a^2)^2$$

Em geral especificamos R_0 e a , ou seja $R_1 = R_0 - a$ e $R_2 = R_0 + a$

$$\therefore R_a^2 = \frac{1}{2} (R_0^2 - 2aR_0 + a^2 + R_0^2 + 2aR_0 + a^2) \quad \therefore \boxed{R_a = R_0 \sqrt{1 + \epsilon^2}}$$

onde $\boxed{\epsilon = \frac{a}{R_0}}$

Na solução de Solov'ev, o eixo magnético é fixo pelo eixo maior e pela largura da coluna de plasma.

$$\psi_s = \frac{\mu_0 p_0}{p_1} = \frac{p_1 \alpha^2}{8(1+\alpha^2)} [R_0^2 - 2aR_0 + a^2 - R_0^2 - a^2]^2$$

$$\boxed{\frac{\mu_0 p_0}{p_1} = \frac{p_1 \alpha^2}{2(1+\alpha^2)} a^2 R_0^2}$$

A imposição de a e R_0 implica em uma relação entre as constantes arbitrária p_0 , p_1 e α^2 . Retornando à condição de que a separatrix não toca o plasma, temos:

$$\frac{\mu_0 p_0}{p_1} = \frac{p_1 \alpha^2}{2(1+\alpha^2)} a^2 R_0^2 \leq \frac{\alpha^2 p_1}{8(1+\alpha^2)} (\tau - R_0^2 - a^2)^2$$

$$\therefore 4 a^2 R_0^2 \leq (\tau - R_0^2 - a^2)^2$$

$$\therefore 2 a R_0 \leq (\tau - R_0^2 - a^2) \therefore \tau \geq R_0^2 + 2aR_0 + a^2 \therefore \tau \geq (R_0 + a)^2$$

$$\text{ou} \quad 2 a R_0 \leq (R_0^2 + a^2 - \tau) \therefore \tau \leq R_0^2 - 2aR_0 + a^2 \therefore \tau \leq (R_0 - a)^2$$

$\therefore \tau = 0$ é permitido.

Além de R_0 e a , em qual se procura impor a altura da coluna de plasma, b , e a triangularidade δ . Vamos então denominar $R_3 = R_0 - \delta a$. Na superfície do plasma, temos

$$\psi_s = \frac{p_1}{2(1+\alpha^2)} \frac{\alpha^2}{4} (R_1^2 - R_0^2)^2 = \frac{p_1}{2(1+\alpha^2)} \left[\tau^2 (R^2 - \tau) + \frac{\alpha^2}{4} (R^2 - R_1^2)^2 \right]$$

$$\therefore \tau^2 = \frac{\alpha^2}{4} \frac{(R_1^2 - R_0^2)^2 - (R^2 - R_0^2)^2}{R^2 - \tau}$$

O ponto máximo da seção transversal é dado por $\frac{d\tau}{dR} = 0$, ou seja,

$$2\tau \frac{d\tau}{dR} = \frac{\alpha^2}{4} \left[-2R \frac{(R_1^2 - R_0^2)^2 - (R^2 - R_0^2)^2}{(R^2 - \tau)^2} - \frac{4R(R^2 - R_1^2)}{R^2 - \tau} \right]_{R=R_3} = 0$$

$$\therefore \tau = \frac{(R_1^2 - R_a^2)^2 - (R_3^2 - R_a^2)^2 + 2R^2(R_3^2 - R_a^2)}{2(R_3^2 - R_a^2)} = \frac{(R_1^2 - R_a^2)^2 + (R_3^4 - R_a^4)}{2(R_3^2 - R_a^2)} = \frac{R_1^2(R_1^2 - 2R_a^2) + R_3^4}{2(R_3^2 - R_a^2)}$$

Fazendo $R_1 = R_0 + a$
 $R_a^2 = R_0^2 + a^2$; $R_3 = R_0 - \delta a$, temos

$$\tau = \frac{(R_0^2 - a^2)^2 - (R_0 - \delta a)^4}{2[(R_0 + a)^2 - (R_0 - \delta a)^2]} = \frac{R_0^2(1 - \epsilon^2)^2 - (1 - \epsilon\delta)^4}{2[(1 + \epsilon)^2 - (1 - \epsilon\delta)^2]}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{R_0^2} = \frac{(1 - \epsilon^2)^2 - (1 - \epsilon\delta)^4}{2[(1 + \epsilon)^2 - (1 - \epsilon\delta)^2]}}$$

A altura da secção transversal, fica então

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{4} \frac{(R_1^2 - R_a^2)^2 - (R_3^2 - R_a^2)^2}{R_3^2 - \frac{R_1^2(R_1^2 - 2R_a^2) + R_3^4}{2(R_3^2 - R_a^2)}} = \frac{\alpha^2}{4} 2(R_a^2 - R_3^2)$$

$$\therefore \alpha = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\epsilon}{2\delta + \epsilon(1 - \delta^2)}}$$

Resumo:

Especificando R_0

$$\epsilon = \frac{a}{R_0}$$

α

τ

$$k = \frac{b}{a} : (\text{elipticidade}) \Rightarrow$$

R_a

p_i

δ (triangularidade)

só sobre p_0 que vai determinar o valor de β (ou q_0)

A condição $\tau \geq R_0^2(1 + \epsilon)^2$ fica

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2 - (1 - \epsilon\delta)^4}{2[(1 + \epsilon)^2 - (1 - \epsilon\delta)^2]} \geq (1 + \epsilon)^2$$

que não é fácil de ser satisfeita

Ondas Magnetohidrodinâmicas num Plasma Homogêneo

Num plasma homogêneo, sem corrente, existem modos normais de oscilação do sistema que correspondem a ondas que perturbam o campo magnético. Estas ondas, que foram inicialmente estudadas por Alfvén, são estáveis. No entanto, quando efeitos devido a gradientes de pressão, correntes e curvatura dos linhas de força são introduzidos, as ondas de Alfvén podem se tornar instáveis. Vamos então começar estudando estas ondas.

As equações MHD ideais são dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 ;$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0 ;$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{E} = 0 ;$$

$$\nabla \times \vec{E} = \mu_0 \vec{j} ;$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 ;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \frac{5}{3} p \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Um plasma homogêneo, permeado por um campo magnético constante, em equilíbrio estacionário é descrito por

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} ; p = p_0 = \text{const.} ; \vec{v} = 0 ; \vec{j} = 0 ; \vec{B} = B_0 \hat{z} .$$

É fácil de verificar que estas grandezas satisfazem as equações MHD em equilíbrio estacionário.

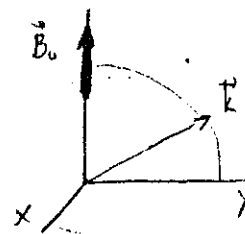
Os modos normais de oscilação do sistema podem ser encontrados perturbando todas as grandezas em torno do equilíbrio, ou seja, supondo que todas as grandezas físicas são da forma

$$q(\vec{r}, t) = q_0 + q_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega ; \nabla = -i\vec{k}$$

onde vamos supor

$$\vec{k} = k_{\perp} \hat{e}_y + k_{\parallel} \hat{e}_z,$$



que é válido sempre para um orientação conveniente dos eixos.
As equações perturbadas ficam, então,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \rho_1 - \vec{k} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 ;$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad i \omega \rho_0 \vec{v}_1 - i \vec{k} p_1 - \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = 0 ;$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \vec{B}_1 - \vec{k} \times \vec{E}_1 = 0 ;$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 \quad \Rightarrow \quad i \vec{k} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 ;$$

$$\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{5}{3} \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega p_1 - \frac{5}{3} \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

Substituindo $\vec{E}_1$ na lei de Faraday, $\rho_0 \vec{B}_1, \vec{B}_0$ na lei de Ampere, e $\vec{j}_1$ na equação de conservação de momento, obtemos

$$i \omega \rho_0 \vec{v}_1 - i \vec{k} \frac{5}{3} \frac{\rho_0}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{v}_1 - \frac{i}{\mu_0 \omega} [\vec{k} \times \{ \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \}] \times \vec{B}_0 = 0$$

O termo em colchetes pode ser expandido na forma

$$[\vec{k} \times \{ \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \}] = [-(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)(\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) B_0^2] \vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{k})(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0$$

A equação acima representa então um sistema homogêneo de equações lineares para as componentes de $\vec{v}_1$; definindo

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} ; \quad V_A = 2,18 \times 10^6 \frac{B_0}{\sqrt{A \frac{n_i}{10^{20}}}} ;$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_1}} ; \quad \gamma = \frac{5}{3} ; \quad V_s = 1,26 \times 10^4 \sqrt{\frac{1}{A} \left(\frac{T}{e} \right)} ;$$

o sistema de equações fica

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k_{||}^2 v_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega^2 - k_{\perp}^2 v_s^2 - k_{||}^2 v_A^2) & -k_{||} k_{\perp} v_s^2 \\ 0 & -k_{||} k_{\perp} v_s^2 & (\omega^2 - k_{||}^2 v_s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = 0$$

O determinante da matriz coeficiente fornece a relação de dispersão cujas soluções são:

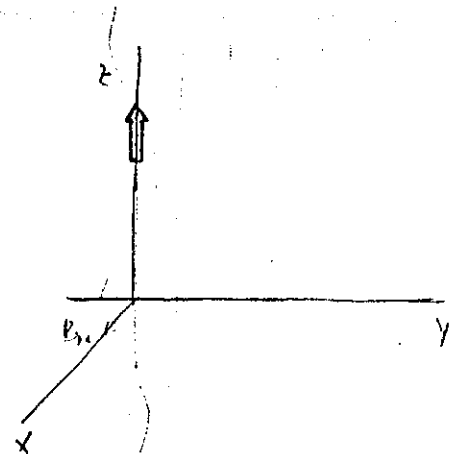
i) Onda de Alfvén circularizada

$$v_{ix} \neq 0; \quad v_{iy} = v_{iz} = 0$$

$$\omega = k_{||} v_A$$

Note que esta onda independe de $k_{\perp}$. O campo magnético perturbado é dado por

$$B_{ix} = - \frac{k_{||} B_0}{\omega} v_{ix},$$



de modo que é uma perturbação perpendicular às linhas de força. A velocidade perturbado pode também ser escrita como

$$v_{ix} = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}_0}{B_0^2}.$$

Desta forma, a onda de Alfvén circularizada é uma perturbação elástica que propaga ao longo do linha de força e com um transporte associado de fluido dado pela velocidade de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$.

ii) Ondas magnetoacústicas

As outras duas soluções são dadas por

$$(\omega^2 - k_{\perp}^2 v_s^2 - k_{||}^2 v_A^2)(\omega^2 - k_{||}^2 v_s^2) - k_{||}^2 k_{\perp}^2 v_s^4 = 0$$

Definindo

$$\alpha = 4 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \frac{v_s^2 v_A^2}{(v_A^2 + v_s^2)^2},$$

obtemos

$$\omega^2 = \frac{1}{2} k^2 (v_A^2 + v_s^2) [1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}]$$

Note que para $v_s/v_A \ll 1$, $\alpha \rightarrow 0$, e para $v_s \neq v_A$, $\alpha = k_{\parallel}^2/k^2 \leq 1$. Portanto $v_A/v_s \ll 1$

ω^2 é sempre positivo, significando um modo puramente oscilante.

Onda magnetoacústica rápida

Para o sinal positivo da raiz, obtemos

$$\omega_f^2 = \frac{1}{2} k^2 (v_A^2 + v_s^2) [1 + \sqrt{1 - \alpha^2}].$$

No limite $v_s \ll v_A$ temos $\omega_f^2 = (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) v_A^2 \geq \omega_A^2$. Por isto esta onda é denominada onda magnetoacústica rápida. ou, quando $v_s \ll v_A$, onda de Alfvén compressional

Esta onda possui componentes ^{de campo} perturbadas tanto $\perp$ como $\parallel$ a $\vec{B}_0$, levando a uma compressão perturbada das linhas de força.

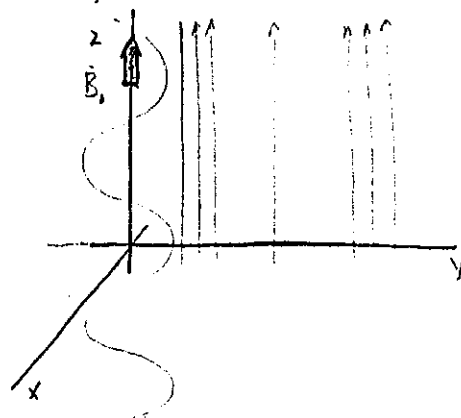
Onda magnetoacústica lenta

Para o sinal negativo da raiz, obtemos

$$\omega_s^2 = \frac{1}{2} k^2 (v_A^2 + v_s^2) [1 - \sqrt{1 - \alpha^2}].$$

Pode-se mostrar que $\omega_s \leq \omega_A$; por isto esta onda é denominada lenta. Em particular, no limite $v_s/v_A \ll 1$, obtemos

$$\omega_s^2 \approx k_{\parallel}^2 v_s^2 \left(1 - \frac{v_s^2}{v_A^2}\right),$$



ou seja, esta onda se reduz a uma onda acústica simples que se observa em gases.

Se derivarmos a relação de dispersão fazendo a aproximação $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (incompressibilidade), só recuperamos a onda de Alfvén circularizada. Pode-se mostrar rigorosamente que as instabilidades mais violentas satisfazem a condição de incompressibilidade, de forma que estas instabilidades são devidas principalmente a mecanismos que destabilizam a onda de Alfvén circularizada.

Curvatura das Linhas de Força

Uma curva no espaço é geralmente descrita na forma paramétrica

$$\hat{r} = \vec{\phi}(s)$$

onde $\vec{\phi}$ é uma função vetorial do parâmetro de comprimento s ao longo da curva. A tangente à curva é dada por

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{d\vec{\phi}}{ds}$$

tal que

$$\hat{\alpha} \cdot \frac{d\hat{\alpha}}{ds} = 0$$

ou seja

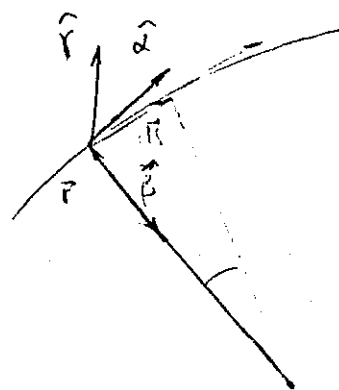
$$\frac{d\hat{\alpha}}{ds} = k \hat{\beta}$$

onde $\hat{\beta}$ é o vetor na direção normal à curva, k é denominado curvatura e o raio de curvatura é definido como

$$R(s) = \frac{1}{k}$$

As fórmulas de Frenet ligam as derivadas dos vetores unitários $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\tau}$:

$$\frac{d\hat{\alpha}}{ds} = k \hat{\beta} ; \quad \frac{d\hat{\beta}}{ds} = -k \hat{\alpha} - \tau \hat{\tau} ; \quad \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \tau \hat{\beta}$$



A derivada ^{direcional} ao longo da curva pode ser calculada usando a fórmula conhecida

$$\frac{d}{ds} = \hat{\alpha} \cdot \nabla$$

Usando as fórmulas de Frenet, a curvatura pode ser calculada como

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{\beta} = - \frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\alpha}$$

No caso de uma linha de força, podemos definir o vetor unitário tangente à linha de força como

$$\hat{\alpha} = \hat{b} = \frac{\vec{B}}{B};$$

então

$$k \hat{\beta} = \frac{d\hat{b}}{ds} = (\hat{b} \cdot \nabla) \hat{b}$$

Em casa vamos fazer um exercício para calcular as principais curvaturas de uma superfície toroidal. Mas vamos agora aplicar para um caso simples. Consideremos um tokamak de seção reta circular. A curvatura toroidal é dada por

$$\frac{\vec{B}}{R_t} = \hat{e}_\varphi \cdot \nabla \hat{e}_\varphi$$

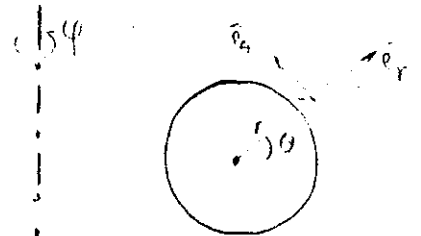
No sistema pseudo-toroidal (r, θ, ψ) , temos

$$h_1 = 1; \quad h_2 = r; \quad h_3 = R_0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right)$$

$$\nabla = \left(\hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{R_0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right)} \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \nabla = \frac{1}{R_0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right)} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x_3} &= - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \hat{e}_2 = - R_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right) \hat{e}_r - \\ &\quad - \frac{r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta\right) \hat{e}_\theta \end{aligned}$$



$$\therefore \frac{\partial \hat{e}_\psi}{\partial \psi} = -\omega \theta \hat{e}_r + r \omega \theta \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$$

$$\boxed{\frac{\hat{\beta}_t}{R_t} = -\frac{\hat{e}_r}{R_0 + r \omega \theta} = -\frac{\hat{e}_r}{r}}$$

A curvatura poloidal é dada por

$$\frac{\hat{\beta}_p}{R_p} = \hat{e}_\theta \cdot \nabla \hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \hat{e}_3 = -\left(\frac{\partial r}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{R_0}{R_0(1 + \frac{r \omega \theta}{R_0})} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(1 + \frac{r \omega \theta}{R_0}\right) \hat{e}_\psi\right)$$

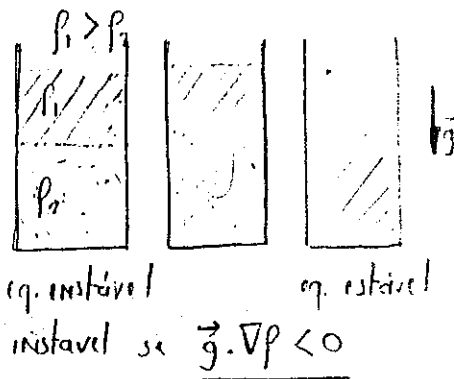
$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

$$\boxed{\frac{\hat{\beta}_p}{R_p} = -\frac{\hat{e}_r}{r}}$$

Nós vemos que a curvatura poloidal sempre aponta para o plasma, enquanto a toroidal aponta para dentro do plasma na região externa e para fora na região interna. A direção da curvatura da superfície magnética tem importância muito grande na estabilidade das configurações de equilíbrio, como veremos adiante.

Instabilidade de Raleigh-Taylor

A instabilidade de Raleigh-Taylor é a instabilidade clássica de um fluido denso sustentado por outro menos denso, sob a ação da gravidade. Embora esta configuração possa ficar em equilíbrio, ela é instável, pois qualquer flutuação na interface faz o fluido mais denso se deslocar para o fundo, trocando de posição com um fluido menos denso.



Esta instabilidade ocorre também

em uma analogia em plasmas confinados

magnéticamente. Neste caso, o fluido mais denso é o plasma enquanto o "fluido" menos denso é o campo magnético confinante. A aceleração da gravidade não é a gravidade real, que tem efeito desprezível na maioria dos casos de interesse. Mas representa um modelo para a aceleração centrífuga experimentada por uma partícula que se move ao longo de uma linha de força curva.

A força num elemento de fluido é naturalmente a soma das forças sobre todas as partículas que o constituem. Se um linha de força é curva, a força média sobre o centro-guia é dada pela força centrífuga (Schmidt, secção 2.3)

$$\vec{f}_c = -m v_{||}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b},$$

que é portanto proporcional à curvatura das linhas de força. A velocidade $v_{||}$ é a velocidade do centro-guia da partícula na direção da linha de força. Se quisermos "modelar" o efeito da curvatura das linhas de força, podemos então supor uma gravidade dada por

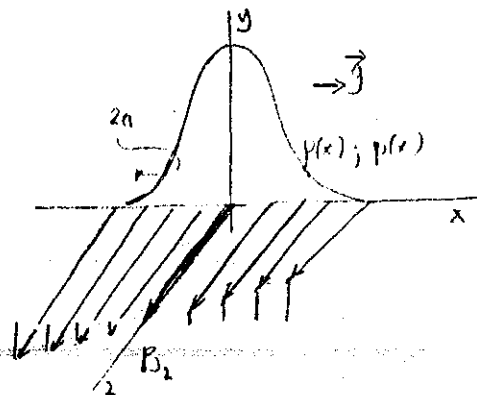
$$\vec{g} = -v_{te}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b}, \quad \left(= \frac{v_{te}^2}{R} \hat{r} \right);$$

onde substituímos $\langle v_{||}^2 \rangle$ para todas as partículas que constituem o elemento de fluido pela velocidade térmica, v_{te} .

Uma outra propriedade importante do campo em plasmas confinados magneticamente é o szalhaninto, ou seja, a variação da direção do campo magnético com a posição. O szalhaninto tem a característica de tornar a configuração de

equilíbrio mais 'rígida' com relação a instabilidades

O modelo mais simples para um plasma confinado magneticamente, o chamado modelo de fatia, seria então dado por uma fatia de plasma, com gradientes numa só direcção, sob a acção de uma gravidade, e limitado por um campo magnético com cisalhamento, como indicado na figura.



$$\rho = \rho(x); \quad j = j(x);$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{z} + B_{10} \hat{y}; \quad B_{10} = B_0 \cos \alpha; \quad B_1 = B_1(x)$$

Geralmente, quando se usa o modelo de fatia,

se aproxima a variação de B_{10} por uma forma linear: $B_{10}(x) = B_0 \frac{x}{L_s}$.

As equações MHD ideal são dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad \therefore \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \rho \vec{g}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \frac{5}{3} p \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ao invés da equação adiabática para a evolução de p , nós vamos simplificar a derivação supondo incompressibilidade:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = 0$$

Então, o sistema de equações fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

(p fica determinado pela terceira equação e não por $dp/dt=0$)

Vamos novamente utilizar a análise perturbativa, ou seja,

$$\vec{X}(\vec{r}, t) = \vec{X}_0(x) + \vec{X}_1(x) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}; \quad |X_1| \ll |X_0|; \quad \vec{k} = k_{\perp} \hat{e}_y + k_{\parallel} \hat{e}_z$$

(Não podemos utilizar $e^{ik_x x}$ também porque o equilíbrio depende de x)

Equilíbrio : $p_0 = p_0(x); \rho_0 = \rho_0(x); \vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z + B_{\perp} \hat{e}_1; B_0 = \text{const.}; B_{\perp} = B_{\perp}(x)$

$$\vec{j}_0 = j_0(x) \hat{e}_x; \vec{v}_0 = 0; \vec{g} = g \hat{e}_x$$

Então em ordem zero a primeira, segunda e quarta equação são trivialmente satisfeitas; a terceira equação dá a condição de equilíbrio.

$$0 = -\frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left[B_{\perp} \frac{\partial}{\partial y} + B_0 \frac{\partial}{\partial z} \right] [B_{\perp}(x) \hat{e}_y + B_0 \hat{e}_z] + \rho_0 g$$

∴

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \rho_0 g}$$

Primeiro ordem: para as variáveis perturbadas, $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$; no entanto, o

operador $\vec{\nabla}$ não corresponde simplesmente a $-i\vec{k}$ porque temos que considerar separadamente a derivada com relação a x .

As equações perturbadas ficam então:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 = 0 \quad \therefore i\omega \rho_1 + \frac{d\rho_0}{dx} v_{1x} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \therefore \frac{dv_{1x}}{dx} - ik_{\perp} v_{1y} - ik_{\parallel} v_{1z} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1] + \rho_1 g \hat{e}_x$$

$$\therefore i\omega \rho_0 \vec{v}_1 = -\nabla \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1] + \rho_1 g \hat{e}_x$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad \therefore i\omega \vec{B}_1 = \vec{v}_1 (\nabla \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0$$

$$i\omega \vec{B}_1 = -v_{1x} \frac{dB_{\perp}}{dx} \hat{e}_y - i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1$$

O termo de curvatura na equação de conservação de momento fica

$$(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = B_{1x} \frac{dB_{\perp}}{dx} \hat{e}_y - i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_1$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left\{ -i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) v_{1x} \frac{dB_{\perp}}{dx} \hat{e}_y - i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \left[-i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) v_{1x} \hat{e}_x - \right. \right. \\ \left. \left. - (i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) v_{1y} + v_{1x} \frac{dB_{\perp}}{dx}) \hat{e}_y - i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) v_{1z} \hat{e}_z \right] \right\}$$

$$\therefore (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = \frac{i}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1$$

Substituindo esta equação e a equação para ρ_1 na equação para conservação de momento, temos

$$\frac{dv_{1x}}{dx} - ik_{\perp} v_{1y} - ik_{\parallel} v_{1z} = 0$$

$$i\omega \rho_0 \vec{v}_1 = -\nabla \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{i}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1 + \frac{i}{\omega} \frac{d\rho_0}{dx} g v_{1x} \hat{e}_x$$

$$\therefore \left[\rho_0 \omega^2 - \frac{1}{\mu_0} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \right] \vec{v}_1 = i\omega \nabla \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{d\rho_0}{dx} g v_{1x} \hat{e}_x$$

Podemos eliminar a pressão perturbada aplicando $\nabla \times \vec{v}_1$ à segunda equação; o sistema de equações fica então:

$$\frac{dv_{ix}}{dx} - ik_{\perp} v_{iy} - ik_{\parallel} v_{iz} = 0$$

$$\nabla \times (f \vec{v}_i) = \nabla \times \left(\frac{d\rho_0}{dx} g v_{ix} \hat{e}_x \right),$$

onde definimos $f(x) = \omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0}$. É bom notar que aplicando $\nabla \times$ eliminamos p_i e ficamos com quatro equações para três incógnitas, as três componentes de $\vec{v}_i$. Portanto uma destas equações tem que ser desnecessária. Como veremos adiante, isto é realmente o que ocorre.

$$\nabla \times (f \vec{v}_i) = f(-ik_{\perp} v_{iz} + ik_{\parallel} v_{iy}) \hat{e}_x - [ik_{\parallel} f v_{ix} + \frac{\partial}{\partial x}(f v_{iz})] \hat{e}_y + [ik_{\perp} f v_{ix} + \frac{\partial}{\partial x}(f v_{iy})] \hat{e}_z$$

$$\nabla \times \left[\left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix} \hat{e}_x \right] = -ik_{\parallel} \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix} \hat{e}_y + ik_{\perp} \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix} \hat{e}_z$$

Da segunda equação obtemos então:

$$f(-ik_{\perp} v_{iz} + ik_{\parallel} v_{iy}) = 0$$

$$-ik_{\parallel} f v_{ix} - \frac{\partial}{\partial x}(f v_{iz}) = -ik_{\parallel} \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix}$$

$$ik_{\perp} f v_{ix} + \frac{\partial}{\partial x}(f v_{iy}) = ik_{\perp} \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix}$$

Multiplicando a segunda equação por $ik_{\perp}$ e a terceira por $ik_{\parallel}$ e somando as duas, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(-ik_{\perp} v_{iz} + ik_{\parallel} v_{iy})] = 0$$

que é satisfeita pela primeira equação. Portanto podemos desprezá-la. Finalmente, multiplicando a segunda equação por $+ik_{\parallel}$ e a terceira por $-ik_{\perp}$ e somando-as, temos

$$(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) f v_{ix} + \frac{\partial}{\partial x} [f(ik_{\perp} v_{iy} + ik_{\parallel} v_{iz})] = (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) g v_{ix}$$

Substituindo a equação para $\nabla \cdot \vec{v}_i$, temos finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} \right] \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} - k^2 \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] v_{ix} = 0}$$

Esta equação tem que ser resolvida impondo condições de contorno apropriadas para v_{1x} em $x = \pm a$ ou em $x \rightarrow \pm \infty$. Mas antes vamos vir uma forma errada de resolver a equação. Suponhamos que a solução seja do tipo

$$v_{1x}(x) = A e^{-ik_x x}.$$

Substituindo na equação original, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} \right] (-ik_x A e^{-ik_x x}) - k \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] A e^{-ik_x x} = 0$$

$$\left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} \right] (-k_x^2) e^{-ik_x x} - ik_x e^{-ik_x x} \frac{d}{dx} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] e^{-ik_x x} = 0$$

Portanto obtemos uma relação de dispersão relacionando ω^2 , k_x , k^2 :

$$\left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} \right] k_x^2 + ik_x \frac{d}{dx} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] - k^2 \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] = 0$$

Como o número imaginário i aparece explicitamente nesta equação, como k_x e k^2 reais a frequência será um número complexo, ou seja, com uma parte real e outra imaginária. Isto significa que o modo resultante será uma oscilação amortecida ou crescente. No entanto, como as equações MHD ideal não possuem dissipação, os modos só podem ser completamente estáveis ou instáveis, ou seja, ω^2 tem que ser real. Mais tarde mostraremos este resultado de forma rigorosa.

A equação para v_{1x} é, na realidade, uma equação de Liouville, que tem o formato (Morse & Feshbach, p. 719)

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] \psi = 0$$

Onde λ é um parâmetro e $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são funções. Esta equação mais as condições de contorno definem o chamado problema de Sturm-Liouville, que é exatamente o tipo de problema que temos que resolver em mecânica quântica, quando resolvermos a equação de Schrödinger.

O operador de Liouville é auto-adjunto; isto tem como consequência que os auto-valores ω_n^2 são reais e as auto-funções ortogonais (ver Morse & Feshbach). Mas vamos mostrar que ω^2 realmente é real derivando uma forma quadrática apropriada.

Vamos impor como condição de contorno que

$$v_{1x}(\pm a) = 0 \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right|_{\pm a} = 0;$$

multiplicando a equação por v_{1x} e integrando, temos

$$\int_{-a}^a dx v_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \right] \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - k^2 \int_{-a}^a dx \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} - g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) \right] v_{1x}^2 = 0$$

$$\int_{-a}^a dx v_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \right] \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = \left\{ \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \right] v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right\}_{-a}^a - \int_{-a}^a dx \left[\omega^2 \rho_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \right] \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right)^2$$

$$\therefore -\omega^2 \int_{-a}^a dx \left[\rho_0 \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right)^2 + k^2 \rho_0 v_{1x}^2 \right] + \int_{-a}^a dx \left[\frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right)^2 + k^2 v_{1x}^2 \right\} + g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) v_{1x}^2 \right] = 0$$

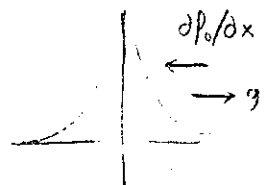
$$\therefore \boxed{\omega^2 = \frac{\int_{-a}^a dx \left\{ g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) v_{1x}^2 + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2}{\mu_0} \left[\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right)^2 + k^2 v_{1x}^2 \right] \right\}}{\int_{-a}^a dx \rho_0 \left[\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right)^2 + k^2 v_{1x}^2 \right]}}$$

Consequências desta forma quadrática:

1. ω^2 é real $\Rightarrow \omega$ real (estabilidade) ou imaginário puro (instabilidade)

2. Como o termo proporcional a $(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2$ é positivo, ω^2 só será negativo se

$g \left(\frac{d\rho_0}{dx} \right) < 0$ que é a mesma condição para fluidos



3. O termo proporcional a $(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)^2$ é estabilizante; portanto a instabilidade será mais forte para vetores de onda tais que $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$.

Se não houvesse cisalhamento, ou seja, $B_{z0} = 0$, bastaria escolher $k_z = 0$ e o sistema seria sempre instável. Com cisalhamento, $\vec{k} \cdot \vec{B}_0$ só pode se anular numa região limitada e, fora dessa região, o cisalhamento tem um efeito estabilizante.

4. Usando a forma quadrática, podemos estimar a razão de crescimento, $\delta = i\omega$, usando uma aproximação apropriada para a auto-função. Como o operador de Sturm-Liouville é auto-adjunto, pode-se mostrar rigorosamente que se o erro na auto-função for da ordem de δ , o erro no auto-valor será da ordem de δ^2 .

$$\sigma \psi = \lambda \psi \quad \therefore \quad \langle \psi^* / \sigma \psi \rangle = \lambda \langle \psi^* \rangle$$

seja $\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + \dots$; $\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda_1 + \delta^2 \lambda_2 + \dots$

$$\langle \psi_0^* + \delta \psi_1^* / \sigma(\psi_0 + \delta \psi_1) \rangle = (\lambda_0 + \delta \lambda_1 + \delta^2 \lambda_2 + \dots) \langle (\psi_0^* + \delta \psi_1^*) / (\psi_0 + \delta \psi_1) \rangle$$

ordem zero:

$$\langle \psi_0^* / \sigma \psi_0 \rangle = \lambda_0 \langle \psi_0^* / \psi_0 \rangle$$

primeira ordem:

$$\delta \langle \psi_1^* / \sigma \psi_0 \rangle + \delta \langle \psi_0^* / \sigma \psi_1 \rangle = \lambda_0 \delta \langle \psi_1^* / \psi_0 \rangle + \lambda_0 \delta \langle \psi_0^* / \psi_1 \rangle + \delta \lambda_1 \langle \psi_0^* / \psi_0 \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \psi_0^* / \psi_1 \rangle &= \langle \psi_1^* / \psi_0 \rangle \\ \langle \psi_0^* / \sigma \psi_1 \rangle &= \langle \psi_1^* / \sigma \psi_0 \rangle \end{aligned} \right\} \text{ pela propriedade de auto-adjunto}$$

Portanto

$$\lambda_1 \langle \psi_0^* / \psi_0 \rangle = 2 \underbrace{\langle \psi_1^* / (\sigma \psi_0 - \lambda_0 \psi_0) \rangle}_{=0} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda_1 = 0}$$

A primeira contribuição não nula para o auto-valor será da ordem de δ^2 . Nós vamos usar esta técnica no chamado princípio de energia.

Estabilidade de tokamaks

Se usarmos este modelo de fatia para entender qualitativamente o que acontece em tokamaks, temos que inicialmente determinar uma expressão para $\vec{g}$,

$$\vec{g} = -v_t^2 (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Podemos usar uma aproximação quasi-cilíndrica para os campos de um tokamak, escrevendo

$$\vec{B} \approx \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \hat{e}_\varphi + \frac{B_p(r)}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \hat{e}_\theta$$

$$|\vec{B}| \approx \frac{\sqrt{B_0^2 + B_p^2(r)}}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \approx \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} ; |B_p| \ll |B_0|$$

$$\frac{\vec{B}}{B} \approx \hat{e}_\varphi + \frac{B_p(r)}{B_0} \hat{e}_\theta ; \quad \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \approx \frac{B_p}{r B_0} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Como } \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_r, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} &= \left[\frac{B_p}{r B_0} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left[\hat{e}_\varphi + \frac{B_p(r)}{B_0} \hat{e}_\theta \right] \\ &= - \frac{B_p^2}{r B_0^2} \hat{e}_r - \frac{1}{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)} \hat{e}_r \end{aligned}$$

Como, para $q \sim 1$, $B_p/B_0 \sim r/R_0$, temos

$$\frac{\frac{B_p^2}{r B_0^2}}{\frac{1}{R_0}} \sim \frac{r}{R_0} \ll 1$$

Portanto, embora a curvatura toroidal das superfícies magnéticas seja menor que a curvatura poloidal, a curvatura toroidal das linhas de força é maior que a poloidal. Então temos

$$\vec{g} \approx \frac{v_E^2}{R} \hat{e}_R;$$

de forma que na parte externa do plasma o sentido de $\vec{g}$ é destabilizante e na parte interna estabilizante. No entanto, como as linhas de força são helicoidais, as partículas circulam sequencialmente por posições instáveis e estáveis do plasma. A estabilidade resultante da configuração não dependerá do campo médio sentido pelas partículas em seu percurso ao longo das linhas de força. Por isso se diz que tokamaks possuem um "poço magnético médio".

Como os modos instáveis são aqueles em que $\vec{r} \cdot \vec{B}_0 = 0$, os modos instáveis seguirão hélices perpendiculares às linhas de $\vec{B}_0$. Por outro lado, como a coluna de plasma tem periodicidade nas direções toroidal e poloidal, podemos representar

$k_{||}$ e $k_{\perp}$ por

$$k_{||} = n \frac{2\pi}{2\pi R_0} = \frac{n}{R_0}$$

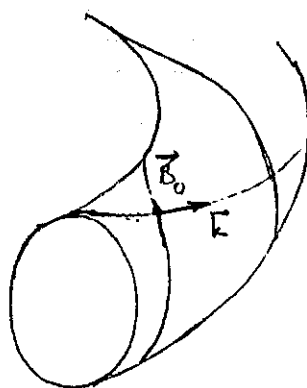
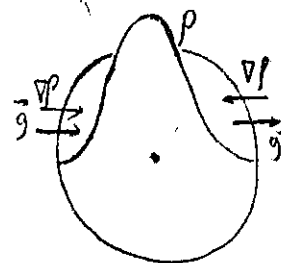
$$k_{\perp} = -m \frac{2\pi}{2\pi r} = -\frac{m}{r}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{m}{r} B_p + \frac{n}{R_0} B_0 = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}_0 = 0 \Rightarrow q(r) = \frac{r B_0}{R_0 B_p} = \frac{m}{n}$$

Ou seja, os modos instáveis tendem a se localizar somente próximo das superfícies onde q seja um número racional.

Finalmente, é bom mencionar que quando β se torna muito alto ($\beta \sim 0.2 I_p [\text{MA}] / B_0 [\text{T}] a [\text{m}]$) é possível se excitar modos ^{instáveis} que se concentram só na região de má curvatura das linhas de força. Estes modos são denominados modos inflados (ballooning modes).



Linearização das Equações MHD para Pequenas Perturbações

Vamos agora utilizar o mesmo método de linearização adotado para estudar a instabilidade de Rayleigh-Taylor para derivar uma equação geral para pequenas perturbações.

As equações MHD ideais são dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j} = 0$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

$$\rho p^{-\gamma} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \vec{v} \cdot \nabla = 0 ; \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Como no caso da instabilidade de Rayleigh-Taylor, vamos linearizar este sistema supondo que todas as grandezas sejam da forma

$$\vec{X}(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r}) + X_1(\vec{r}, t) ; \quad |X_1| \ll |X_0|$$

(Nota que neste estágio não podemos ainda decompor $X_1(\vec{r}, t)$ em componentes de Fourier espaciais porque in princípio as grandezas de equilíbrio dependem de todas as coordenadas espaciais).

Equilíbrio

$$\vec{v}_0 = 0 ; \quad \rho_0 = \rho_0(\vec{r}) ; \quad p_0 = p_0(\vec{r}) ; \quad \vec{j}_0 = \vec{j}_0(\vec{r}) ; \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_0(\vec{r}) ; \quad \vec{E}_0 = 0$$

$$\nabla p_0 - \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 = 0$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0} \quad \text{equação de equilíbrio.}$$

Perturbação:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1] = 0$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$$

$$\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \delta p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (\gamma = 5/3)$$

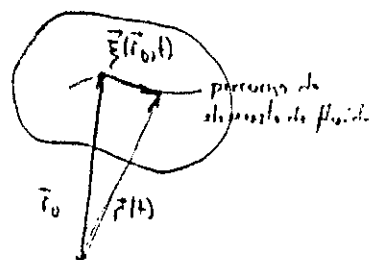
A equação para p_1 não precisa ser resolvida com o sistema porque p_1 não aparece nas outras equações (isto só acontece quando há gravidade). Diferenciando a equação de conservação de momento com relação a t e substituindo a última equação, temos

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \nabla [\vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \delta p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}) \times \vec{B}_0 + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}]$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$$

Dada uma perturbação inicial $\vec{v}_1(\vec{r}, 0)$, o sistema de equações acima tem que ser resolvido para $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$. Se a solução for divergente o sistema é instável e se for limitada (por exemplo, oscilatória) o sistema é estável. Ao invés de resolver as equações para $\vec{v}_1$, é mais conveniente introduzir o deslocamento Lagrangiano $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$, ou seja o deslocamento de um elemento de fluido de sua posição de equilíbrio em função do tempo. Desta forma

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$



representa a velocidade do elemento de fluido, para $\vec{r}_0$ fixo, durante seu movimento ao longo do tempo. A velocidade perturbada $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, por outro lado, corresponde à derivada

Euleriana, ou seja, $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ representa a história do vetor velocidade numa posição espacial fixa enquanto vários elementos de fluido passam por ela.

Em primeiro ordem, no instante, as duas velocidades são iguais:

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}_0, t) + (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v}_1 + \dots \approx \vec{v}_1(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} ; \quad \vec{\xi}(\vec{r}_0, 0) = 0.$$

Substituindo $\vec{v}_1 = \partial \vec{\xi} / \partial t$ na equação acima e integrando uma vez com respeito ao tempo, obtemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} &= \vec{F}(\vec{\xi}) ; \quad \vec{F}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}] + \\ &\quad \nabla[\vec{\xi} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}] \\ \vec{Q} &= \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}). \end{aligned}}$$

Nesta equação o vetor $\vec{Q}$ passou a representar o campo magnético perturbado ($\vec{B}_1$) e $\vec{B}$ o campo de equilíbrio ($\vec{B}_0$). O operador $\vec{F}(\vec{\xi})$ representa uma densidade de força e, como veremos mais tarde, é auto-adjunto, ou seja

$$\int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}) dV = \int \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV,$$

onde $\vec{\eta}$ e $\vec{\xi}$ são duas funções arbitrárias. Esta propriedade é extremamente importante e vai permitir derivar um princípio de energia associado à solução da equação acima.

Versão incompressível:

A equação para um fluido incompressível pode ser derivada heurísticamente das equações MHD tomando o limite $\delta \rightarrow \infty$, $\nabla \cdot \vec{v} \rightarrow 0$ de modo que

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) p = -\delta p \nabla \cdot \vec{v}$$

permanece finito. No caso das equações perturbadas, temos que

$$\pi \equiv p_1 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p,$$

tem que permanecer finito no limite $\delta \rightarrow \infty$, $\nabla \cdot \vec{\xi} \rightarrow 0$. Então nós escrevemos a equação para perturbações incompressíveis na forma

$$\rho \frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{\xi}); \quad \vec{F}(\vec{\xi}) = -\nabla \Pi + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0]$$

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0; \quad \vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$$

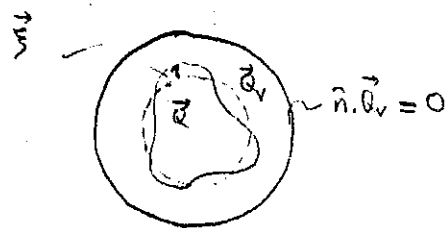
Neste sistema de equações, Π é uma variável que tem que ser determinada com a solução.

Vácuo

Em geral, entre o plasma e alguma parede condutora existe um vácuo. Naturalmente, as correntes perturbadas no plasma induzem campos perturbados no vácuo que têm que satisfazer condições apropriadas de contorno na fronteira plasma-vácuo. Como no vácuo não tem sentido falar em deslocamento de um elemento de fluido, procuramos determinar diretamente o campo perturbado $\vec{Q}_v$ que satisfaz as equações

$$\nabla \times \vec{Q}_v = 0; \quad \nabla \cdot \vec{Q}_v = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{Q}_v = 0 \quad \text{Na parede condutora}$$



Como $\nabla \times \vec{Q}_v = 0$, o campo perturbado no vácuo pode também ser derivado de um potencial escalar:

$$\vec{Q}_v = -\nabla \phi_v; \quad \boxed{\nabla^2 \phi_v = 0}$$

Condições de Contorno

Na interface plasma-vácuo temos que impor as condições de contorno

$$0 = \hat{n} \cdot \vec{B} = \hat{n} \cdot \vec{B}_0 \quad \text{e} \quad \left[p + \frac{B^2}{2\mu} \right] = 0.$$

Estas equações têm que ser linearizadas e satisfeitas na interface perturbada. Para

precisamos uma expressão para o vetor $\hat{n}$, normal à fronteira perturbada. A expressão para $\hat{n}$, pode ser calculada de uma forma simples impondo que $\hat{n} \cdot d\vec{\ell} = 0$, onde $d\vec{\ell}$ é qualquer elemento de comprimento na superfície da interface plasma-vácuo.

Como

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$$

temos

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} dx_{0j} = \left(\frac{\partial x_{0i}}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0j}} \right) dx_{0j} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0j}} \right) dx_{0j}$$

$$dx_i = dx_{0j} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0j}} \right) \Rightarrow \boxed{d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_0 \cdot \left(\vec{I} + \nabla \vec{\xi} \right)}$$

Então, se $d\vec{\ell}$ for um elemento de comprimento na superfície, temos que

$$\hat{n} \cdot d\vec{\ell} = 0 \therefore 0 = d\vec{\ell}_0 \cdot \left(\vec{I} + \nabla \vec{\xi} \right) \cdot (\hat{n}_0 + \hat{n}_1) \approx d\vec{\ell}_0 \cdot \hat{n}_0 + [(d\vec{\ell}_0 \cdot \nabla) \vec{\xi}] \cdot \hat{n}_0 + d\vec{\ell}_0 \cdot \hat{n}_1$$

$$0 \approx d\vec{\ell}_0 \cdot [(\nabla \vec{\xi}) \cdot \hat{n}_0 + \hat{n}_1]$$

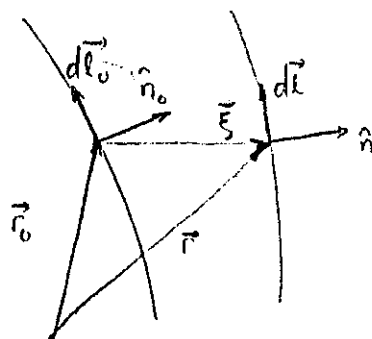
$$\hat{n}_1 = -(\nabla \vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{\lambda}$$

onde $\vec{\lambda}$ é qualquer vetor $\perp d\vec{\ell}_0$. Mas como $d\vec{\ell}_0$ pode ter qualquer direção na superfície perturbada, escolhemos

$$\vec{\lambda} = \mu \hat{n}_0$$

onde μ é um escalar a ser determinado. Portanto

$$\hat{n}_1 = -(\nabla \vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \mu \vec{n}_0$$



Mas o versor tem que ter módulo unitário, ou seja, $|\hat{n}|=1$; desta forma

$$\hat{n}_0 \cdot \hat{n}_1 = 0 \Rightarrow \mu = \hat{n}_0 \cdot (\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0$$

ou seja,

$$\hat{n}_1 = -(\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0 + [\hat{n}_0 \cdot (\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0] \hat{n}_0$$

O campo $\vec{B}$ também tem que ser calculado na fronteira perturbada, ou seja,

$$\vec{B}(\vec{r}_0 + \xi) \approx \vec{B}(\vec{r}_0) + (\xi \cdot \nabla) \vec{B} + \dots; \quad \vec{Q}(\vec{r}_0 + \xi) \approx \vec{Q}(\vec{r}_0)$$

Portanto o campo total na fronteira perturbada é dada por

$$\vec{B}(\vec{r}_0 + \xi) + \vec{Q} = \vec{B} + \vec{Q} + (\xi \cdot \nabla) \vec{B} + \dots$$

Calculando $\hat{n} \cdot \vec{B}$ no plasma, temos então:

$$\begin{aligned} 0 = \hat{n} \cdot \vec{B} &= \{ \hat{n}_0 - (\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0 + \hat{n}_0 [\hat{n}_0 \cdot (\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0] \} \cdot [\vec{B} + \vec{Q} + (\xi \cdot \nabla) \vec{B}] \\ &\approx -\vec{B}_0 \cdot (\nabla \xi) \cdot \hat{n}_0 + \hat{n}_0 \cdot \vec{Q} + [(\xi \cdot \nabla) \vec{B}_0] \cdot \hat{n}_0 \\ &= -\hat{n}_0 \cdot [\vec{B}_0 \cdot (\nabla \xi) - \xi \cdot \nabla \vec{B}_0] + \hat{n}_0 \cdot \vec{Q} \\ &= -\hat{n}_0 \cdot [\nabla \times (\xi \times \vec{B}) - \xi (\nabla \cdot \vec{B}) + \vec{B} (\nabla \cdot \xi)] + \hat{n}_0 \cdot \vec{Q} \\ &\quad = 0 \\ &= \hat{n}_0 \cdot [\vec{Q} - \nabla \times (\xi \times \vec{B})] \end{aligned}$$

Mas, pela própria definição de $\vec{Q}$, esta relação é automaticamente satisfeita no plasma. Por outro lado, no vácuo $\vec{Q}_v$ não é relacionado a ξ e, portanto, a condição $\hat{n} \cdot \vec{B}_v = 0$ fica

$$\hat{n}_0 \cdot \nabla \times (\xi \times \vec{B}_v) = \hat{n}_0 \cdot \vec{Q}_v$$

Pode ser mostrado, através da manipulação de identidades vetoriais, que esta relação pode também ser escrita na forma

A Formulação de Modos Normais

Como o operador $\vec{F}(\vec{\xi})$ não possui derivadas explícitas no tempo, podemos formular o problema de estabilidade como um problema de modos normais supondo que todas as grandezas perturbadas variam harmonicamente no tempo, isto é,

$$\vec{X}_i(\vec{r}, t) = \vec{X}_i(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Desta forma, procuramos soluções que oscilam continuamente no tempo, independente das condições iniciais. Obtemos então

$$\begin{cases} -\omega^2 \rho \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}] + \nabla [\vec{\xi} \cdot \nabla p + \rho \nabla \cdot \vec{\xi}] \\ \vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) \end{cases}$$

Dadas as condições de contorno para $\vec{\xi}$, esta equação tem que ser resolvida para o auto-valor ω^2 .

A formulação do problema de estabilidade como um problema de auto-valor é útil somente se os auto-valores ω^2 forem discretos e distinguíveis de modo que o conceito de estabilidade exponencial seja válido. As propriedades do espectro ω^2 decorrem da propriedade hermitiana de $\vec{F}(\vec{\xi})$, ou seja,

$$\int \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) d\vec{r} = \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}) d\vec{r},$$

que será demonstrada numa série de exercícios.

A equação para $\vec{\xi}^*$ é dada por

$$-(\omega^2)^* \rho \vec{\xi}^* = \vec{F}(\vec{\xi}^*);$$

multiplicando escalarmente a equação para $\vec{\xi}$ por $\vec{\xi}^*$ e a para $\vec{\xi}^*$ por $\vec{\xi}$, subtraindo uma da outra e integrando sobre o volume do plasma, temos

$$-[\omega^2 - (\omega^2)^*] \int \rho \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}^* d\vec{r} = \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) d\vec{r} - \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}^*) d\vec{r} = 0$$

em virtude da propriedade de $\vec{F}$ ser auto-adjunto. Portanto

$$\omega^2 = \omega^{2*},$$

ou seja, ω^2 é real. Se $\omega^2 > 0$ temos que o modo é estável e se $\omega^2 < 0$ o modo é instável (o fato de ω^2 ser real implica que $\vec{\xi}(\vec{r})$ também é real). A transição de instável para estável ocorre precisamente em $\omega^2 = 0$.

Uma outra consequência de $\vec{F}(\vec{\xi})$ ser auto-adjunto é que as auto-funções são ortogonais, com uma função peso $\rho(\vec{r})$. Consideremos dois auto-valores ω_m^2 e ω_n^2 com suas respectivas auto-funções $\vec{\xi}_m$ e $\vec{\xi}_n$. Então

$$-\omega_m^2 \rho \vec{\xi}_m = \vec{F}(\vec{\xi}_m):$$

$$-\omega_n^2 \rho \vec{\xi}_n = \vec{F}(\vec{\xi}_n).$$

Multiplicando a primeira equação escalarmente por $\vec{\xi}_n$, a segunda por $\vec{\xi}_m$, subtraindo uma da outra e integrando sobre todo o volume ocupado pelo plasma, obtemos

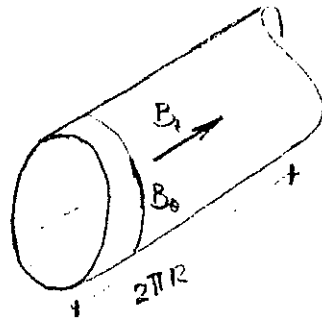
$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int \rho \vec{\xi}_m \cdot \vec{\xi}_n d\vec{r} = 0$$

Portanto, se $\omega_m^2 \neq \omega_n^2$ (modos não-degenerados), temos

$$\boxed{\int \rho \vec{\xi}_m \cdot \vec{\xi}_n = 0}$$

Estabilidade do 'Screw-Pinch' Linear

Vamos agora determinar a equação para os modos normais numa coluna cilíndrica de plasma de seção reta circular. Como no caso de equilíbrio, esta coluna será considerada um modelo para um tokamak ou screw-pinch de grande razão de aspecto, ou seja, consideraremos que a coluna tenha um comprimento de periodicidade $2\pi R$. O campo de equilíbrio é dado por



$$\vec{B} = B_\theta(r)\hat{e}_\theta + B_z(r)\hat{e}_z$$

e satisfaz a equação de equilíbrio

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}.$$

Pode-se mostrar rigorosamente, através do princípio de energia que vemos na tarde, que as principais instabilidades satisfazem a condição $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$, ou seja, são incompressíveis. A incompressibilidade simplifica consideravelmente o álgebra para derivar a equação dos modos normais em geometria cilíndrica. Por isso vamos restringir nossos cálculos para modos incompressíveis. A equação para os modos normais é dada então por

$$-\omega^2 \rho \vec{\xi} = -\nabla \pi + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}]$$

$$\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$$

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$$

Como as grandezas de equilíbrio só dependem da coordenada radial r , podemos decompor as grandezas perturbadas em componentes de Fourier em θ e z :

$$\vec{\xi}(r, \theta, z, t) = \vec{\xi}(r) e^{-i(\omega t - k_z z - m\theta)} = \vec{\xi}(r) e^{-i(\omega t - \frac{m}{r}\theta - k_z z)}$$

onde

$$\vec{k} = \frac{m}{r} \hat{e}_\theta + k \hat{e}_z$$

O campo magnético perturbado é dado por

$$\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) = \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\vec{Q} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Para calcular $\vec{Q}$ é necessário utilizar a expressão correta para o operador $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b}$ em coordenadas cilíndricas. Temos então

$$\begin{aligned} \vec{Q} = & \left[\left(1 \frac{m}{r} B_\theta + k B_z \right) \xi_r - \frac{\xi_\theta B_\theta}{r} \right] \hat{e}_r + \left[1 \left(\frac{m}{r} B_\theta + k B_z \right) \xi_\theta + \frac{B_\theta \xi_r}{r} \right] \hat{e}_\theta + \left(\frac{m}{r} B_\theta + k B_z \right) \xi_z \hat{e}_z \\ & + \frac{\xi_\theta B_\theta}{r} \hat{e}_r - \xi_r \frac{dB_\theta}{dr} \hat{e}_\theta - \xi_r \frac{dB_z}{dr} \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{Q} = i F \vec{\xi} - \left(r \frac{d}{dr} \frac{B_\theta}{r} \right) \xi_r \hat{e}_\theta - \left(\frac{dB_z}{dr} \right) \xi_r \hat{e}_z,$$

onde

$$F = \vec{k} \cdot \vec{B} = \frac{m}{r} B_\theta + k B_z$$

O último termo na equação para $\vec{\xi}$ pode ser escrito como

$$(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla (\vec{B} \cdot \vec{Q});$$

então a equação fica

$$-\omega^2 \vec{\xi} = -\nabla \left[\pi + \frac{\vec{B} \cdot \vec{Q}}{\mu_0} \right] + \frac{1}{\mu_0} [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{B}]$$

A expressão do último termo em coordenadas cilíndricas fica

$$\begin{aligned} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{B} = & \left(i F Q_r - \frac{B_\theta Q_\theta}{r} \right) \hat{e}_r + \left(i F Q_\theta + \frac{B_\theta Q_r}{r} \right) \hat{e}_\theta + i F Q_z \hat{e}_z \\ & - \frac{Q_\theta B_\theta}{r} \hat{e}_r + Q_r \frac{dB_\theta}{dr} \hat{e}_\theta + Q_r \frac{dB_z}{dr} \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{B} &= iF \vec{Q} - 2 \frac{B_0}{r} Q_\theta \hat{e}_r + Q_r \left(\frac{dB_0}{dr} + \frac{B_0}{r} \right) \hat{e}_\theta + Q_z \frac{dB_z}{dr} \hat{e}_z \\
 &= -F^2 \vec{\xi} - iF \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \xi_r \hat{e}_\theta - iF \left(\frac{dB_z}{dr} \right) \xi_r \hat{e}_z \\
 &\quad - 2 \frac{B_0}{r} \left[iF \xi_\theta - \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \xi_r \right] \hat{e}_r + iF \xi_r \left(\frac{dB_0}{dr} + \frac{B_0}{r} \right) \hat{e}_\theta \\
 &\quad + iF \xi_r \frac{dB_z}{dr} \hat{e}_z
 \end{aligned}$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{Q} + (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{B} = -F^2 \vec{\xi} + 2iF \frac{B_0}{r} \xi_r \hat{e}_\theta - 2 \frac{B_0}{r} \left[iF \xi_\theta - r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_0}{r} \right) \xi_r \right] \hat{e}_r$$

Então o sistema de equação fica

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + i \frac{m}{r} \xi_\theta + ik \xi_z = 0$$

$$(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \vec{\xi} = \mu_0 \nabla \left[\Pi + \frac{\vec{B} \cdot \vec{Q}}{\mu} \right] + 2 \frac{B_0}{r} \left(iF \xi_\theta - r \xi_r \frac{d}{dr} \frac{B_0}{r} \right) \hat{e}_r - 2iF \frac{B_0}{r} \xi_r \hat{e}_\theta$$

Para evitar calcular a pressão perturbada Π , usamos novamente o truque de calcular o rotacional da segunda equação. Igualando as componentes do rotacional dos termos da equação, obtemos

$$(2) \quad (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \left(i \frac{m}{r} \xi_z - ik \xi_\theta \right) = -2k \frac{FB_0}{r} \xi_r$$

$$(3) \quad ik (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \xi_r - \frac{\partial}{\partial r} [(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \xi_r] = 2ik \frac{B_0}{r} (iF \xi_\theta - r \xi_r \frac{d}{dr} \frac{B_0}{r})$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) r \xi_\theta] - i \frac{m}{r} (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \xi_r &= -2i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (FB_0 \xi_r) - \\
 &\quad - 2i \frac{m}{r} \frac{B_0}{r} \left(iF \xi_\theta - r \xi_r \frac{d}{dr} \frac{B_0}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que ocorreu para o caso da instabilidade de Rayleigh-Taylor, estas três equações são redundantes. Isto pode ser mostrado multiplicando-se a segunda equação por im/r e a terceira por ik e somando as duas, o resultado é

$$- \frac{\partial}{\partial r} [(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) r \left(i \frac{m}{r} \xi_z - ik \xi_\theta \right) + 2kFB_0 \xi_r] = 0,$$

que é satisfeito pela primeira equação. No caso da instabilidade de Rayleigh-Taylor, desprezamos a primeira equação e trabalhamos com as duas últimas. Neste caso, os termos em ξ_0 no lado direito das equações não são eliminados por uma conveniente combinação linear das duas. Então calculamos explicitamente ξ_0 e ξ_z a partir da primeira equação e da equação $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ e substituímos as expressões em qualquer das equações resultantes. Das equações

$$e \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + i \frac{m}{r} \xi_0 + ik \xi_z = 0$$

$$(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \left(i \frac{m}{r} \xi_z - ik \xi_0 \right) = - 2k \frac{F B_0}{r} \xi_r$$

obtemos

$$(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \xi_z = \frac{ik}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r} \left[(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + 2m \frac{F B_0}{r} \xi_r \right]$$

e

$$\xi_0 = \frac{i}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r} \left[\frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) - \frac{2k^2}{\mu_0 \rho \omega^2 - F^2} F B_0 \xi_r \right].$$

Substituindo estas expressões na equação (3) (poder como exercício para mostrar que substituindo na equação (4) se obtém o mesmo resultado) temos,

$$\begin{aligned} (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \xi_r - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 \rho \omega^2 - F^2}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) \right) - 2m (r \xi_r) \frac{d}{dr} \left[\frac{F B_0}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r^2} \right] - \\ - 2m \frac{F B_0}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) = - 2m \frac{F B_0}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{4k^2 B_0^2}{r^3} \frac{F^2}{(\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \xi_r \\ - \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{B_0}{r} \right)^2 \right] (r \xi_r) \end{aligned}$$

Finalmente, tirando o índice r de ξ_r e usando a relação

$$- 2m \frac{F B_0}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) r^3} + \frac{B_0^2}{r^2} = - \frac{2k B_0 G}{r^2 \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} - \frac{B_0^2}{r^2},$$

onde

$$G = \frac{m}{r} B_z - k B_{\theta},$$

obtemos a equação de auto-valor para ξ na forma

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\mu_0 \rho \omega^2 - F^2}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d}{dr} (r\xi) \right] - \left[\frac{1}{r} (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2) - \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{d}{dr} \left[\frac{2k B_\theta G}{r^2 \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \right] - \frac{4k^2 B_\theta^2}{r^3} \frac{F^2}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (\mu_0 \rho \omega^2 - F^2)} \right] (r\xi) = 0$$

Esta equação tem que satisfazer as condições de contorno apropriadas:

$$r=0 : r\xi \rightarrow 0$$

$$r=a : \xi \rightarrow 0 \text{ se plasma limitado por uma parede rígida}$$

ξ tem que satisfazer condição de contorno com a solução no vácuo.

É interessante comparar esta equação com a que derivamos para a instabilidade de Rayleigh-Taylor em geometria plana.

$$\frac{d}{dx} \left[\mu_0 \rho \omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{B})^2 \right] \frac{dv_{ix}}{dx} - k^2 \left[(\mu_0 \rho \omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{B})^2) - \mu_0 g \left(\frac{d\rho}{dx} \right) \right] v_{ix} = 0$$

Como neste caso, esperamos que as instabilidades ocorram próximo das superfícies $F = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$. O efeito da gravidade é agora devido aos três últimos termos da equação que são devidos à curvatura das linhas de força.

A instabilidade ou estabilidade do plasma depende se $\omega^2 < 0$ ou $\omega^2 > 0$; portanto a estabilidade marginal ocorre no limite $\omega^2 \rightarrow 0$. Exatamente neste limite, a equação fica

$$\frac{d}{dr} \frac{r F^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (r\xi) - \left[\frac{F^2}{r} + \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{r^2} + \frac{2k B_\theta G}{m^2 + k^2 r^2} \right) - \frac{4k^2 B_\theta^2}{r(m^2 + k^2 r^2)} \right] (r\xi) = 0$$

Portanto os pontos singulares desta equação, onde a solução diverge ocorrem nos pontos onde $F = 0$, ou seja,

$$F(r) = \frac{m}{r} B_\theta + k B_z = 0$$

Se a coluna de plasma for um modelo para uma coluna toroidal, de comprimento $2\pi R$, o comprimento de onda na direção toroidal tem que ser um submúltiplo de $2\pi R$, ou seja

$$\lambda = \frac{2\pi R}{n} \Rightarrow k = \frac{n}{R}$$

$$F(R) = \frac{m}{r} B_\theta + \frac{n}{R} B_z = \frac{B_\theta}{r} [m + nq(r)]$$

onde

$$q(r) = \frac{r B_\theta}{R B_z}.$$

Portanto, os pontos singulares da equação para estabilidade marginal ocorrem exatamente nas superfícies racionais

$$q(r) = -\frac{m}{n};$$

nestas superfícies $F = \vec{r} \cdot \vec{B} = 0$. O sinal negativo de q significa simplesmente que m/n tem que ser negativo, ou seja, o modo gira no sentido contrário às linhas de $\vec{B}$.

Equação de Newcomb (apresentar a derivação abaixo numa série de exercícios)

Vamos agora apresentar a equação de modos normais numa forma um pouco mais conveniente para obter resultados analiticamente. O termo de derivada de 2ª ordem pode ser reduzido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{\mu_0 f \omega^2 - F^2}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d}{dr} (r \xi) &= \frac{d}{dr} \frac{\mu_0 f \omega^2 - F^2}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} + \frac{d}{dr} \frac{\mu_0 f \omega^2 - F^2}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \xi \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2) r}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{r} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2)}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} + \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2)}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} + \xi \frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2)}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2) r}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} + \xi \frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2)}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \end{aligned}$$

Então a equação original fica

$$\frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2) r}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \frac{d\xi}{dr} + t \xi = 0$$

onde

$$\begin{aligned} t &= -r (\mu_0 f \dot{\omega}^2 - F^2) + \frac{4k^2 B_0^2}{r} \frac{F^2}{\left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (\mu_0 f \omega^2 - F^2)} + r^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{B_0^2}{r^2} + \frac{2k B_0 G}{r^2 \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \right] + \\ &\quad + r \frac{d}{dr} \frac{(\mu_0 f \omega^2 - F^2)}{r \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right)} \\ &= -r (\mu_0 f \omega^2 - F^2) - \frac{4k^2 r B_0^2}{m^2 + k^2 r^2} + \mu_0 f \omega^2 \frac{4k^2 r B_0^2}{(m^2 + k^2 r^2) (\mu_0 f \omega^2 - F^2)} + r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{B_0^2}{r^2} + \frac{2k B_0 G}{r^2 (m^2 + k^2 r^2)} \right) - \\ &\quad - r \frac{d}{dr} \frac{r F^2}{m^2 + k^2 r^2} + r \frac{d}{dr} \frac{r \mu_0 f \omega^2}{m^2 + k^2 r^2} \\ &= r F^2 + r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{B_0^2}{r^2} \right) - \frac{4k^2 r B_0^2}{m^2 + k^2 r^2} + r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{2k B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right) - r \frac{d}{dr} \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} \\ &\quad - \mu_0 f r \omega^2 \left[1 - \frac{4k^2 B_0^2}{(m^2 + k^2 r^2) (\mu_0 f \omega^2 - F^2)} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho r}{m^2 + k^2 r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore t = & r F^2 + r^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{B_0^2}{r^2} + \frac{2k B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right] - \frac{4k^2 r B_0^2}{m^2 + k^2 r^2} - r \frac{d}{dr} \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} - \\
 & - \mu_0 \rho r \omega^2 \left[\frac{m^2 + k^2 r^2 - 1}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{4k^2 B_0^2}{(m^2 + k^2 r^2)(\mu_0 \omega^2 - F^2)} - \frac{r}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{m^2 + k^2 r^2} \right) \right] \\
 & \equiv h(r)
 \end{aligned}$$

Temos, no entanto, que

$$r \frac{d}{dr} \frac{r F^2}{m^2 + k^2 r^2} = \frac{d}{dr} \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{r F^2}{m^2 + k^2 r^2}$$

$$r^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{B_0^2}{r^2} + \frac{2k B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right] = \frac{d}{dr} \left[B_0^2 + \frac{2k r^2 B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right] - \frac{2}{r} \left[B_0^2 + \frac{2k r^2 B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right]$$

Então t fica

$$t = r F^2 + \frac{r F^2}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{4k^2 r B_0^2}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{2}{r} \left[B_0^2 + \frac{2k r^2 B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} \right] + \frac{d}{dr} \left[B_0^2 + \frac{2k r^2 B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} \right] - \mu_0 \rho r \omega^2 h$$

$$\begin{aligned}
 B_0^2 + \frac{2k r^2 B_0 G}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} &= \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left[(m^2 + k^2 r^2) B_0^2 + 2k r B_0 (m B_0 - k r B_0) - \right. \\
 &\quad \left. - (m^2 B_0^2 + k^2 r^2 B_0^2 + 2m k r B_0 B_0) \right] \\
 &= - \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} B^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \left[- \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} B^2 \right] &= - \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{dB^2}{dr} - B^2 \frac{d}{dr} \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \\
 &\quad + \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{B_0^2}{r} - B^2 \frac{d}{dr} \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \\
 &= \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} - \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{B_0^2}{r} + \frac{2(k^2 r^2)^2}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \frac{B^2}{r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore t &= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2+k^2r^2-1}{m^2+k^2r^2} r F^2 - 4 \frac{k^2r B_0^2}{m^2+k^2r^2} - \frac{2}{r} \left[\frac{r^2 F^2}{m^2+k^2r^2} - \frac{k^2r^2}{m^2+k^2r^2} B^2 \right] \\
&\quad - \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \frac{B_0^2}{r} + \frac{2(k^2r^2)^2}{(m^2+k^2r^2)^2} \frac{B^2}{r} - \mu_0 \rho r \omega^2 h \\
&= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2+k^2r^2-1}{m^2+k^2r^2} r F^2 - \frac{2k^2r^2}{(m^2+k^2r^2)^2} \frac{1}{r} [2B_0^2 - B_r^2 - B_\theta^2 + B_z^2] + \\
&\quad + \frac{2(k^2r^2)^2}{(m^2+k^2r^2)^2} \frac{B^2}{r} - \mu_0 \rho r \omega^2 h \\
&= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2+k^2r^2-1}{m^2+k^2r^2} r F^2 - \frac{2k^2r^2}{(m^2+k^2r^2)^2} \frac{1}{r} [m^2 B_0^2 - k^2r^2 B_z^2] \\
&\quad \quad \quad r \left(m \frac{B_0}{r} - k B_z \right) F
\end{aligned}$$

Com este resultado, a equação original fica

$$\frac{d}{dr} \left[f(r) - \frac{\mu_0 r^3 \rho \omega^2}{m^2+k^2r^2} \right] \frac{d\xi}{dr} - [g(r) - \mu_0 \rho r \omega^2 h(r)] \xi = 0$$

onde

$$f(r) = \frac{r^3 F^2}{m^2+k^2r^2}$$

$$g(r) = \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2+k^2r^2-1}{m^2+k^2r^2} r F^2 - \frac{2k^2r^2}{(m^2+k^2r^2)^2} \left(\frac{m}{r} B_0 - k B_z \right) F$$

$$h(r) = \frac{1}{m^2+k^2r^2} \left[m^2+k^2r^2-1 + \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + \frac{4k^2r^2 B_0^2}{F^2 - \mu_0 \rho \omega^2} \right]$$

Estabilidade marginal

Para $\omega^2 = 0$, a equação fica

$$\frac{d}{dr} f(r) \frac{d\xi}{dr} - g(r) \xi = 0 ;$$

esta é denominada equação de Newcomb, porque baseado nela ele realizou o mais completo estudo da estabilidade de um screw-pinch linear. Seu artigo é uma das obras primas da literatura em Física de Plasmas (W. A. Newcomb, *Annals of Physics* 10, 232 (1960)). Como no caso da equação para $(r\xi)$, os pontos singulares da equação de Newcomb são os pontos onde $F=0$.

Note que para $\omega^2 = 0$, a inércia do plasma ($\sim \rho$) não participa da equação para ξ . Para verificarmos a importância da inércia, basta comparar $f(r)$ com o termo proporcional à ω^2 .

$$F^2 \rightsquigarrow \mu_0 \rho \omega^2 \quad \therefore \left(\frac{m}{r} B_\theta + k B_z \right)^2 \rightsquigarrow \mu_0 \rho \omega^2$$

$$\therefore \frac{B_z^2}{R^2} \left(\frac{m}{q} + kR \right)^2 \rightsquigarrow \mu_0 \rho \omega^2$$

$$(k = \frac{n}{R})$$

$$\therefore \left(\frac{B_z}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right)^2 \frac{1}{R^2} \left(\frac{m}{q} + n \right)^2 \rightsquigarrow \omega^2$$

$$\left(\frac{v_A}{R} \right)^2 \left(\frac{m}{q} + n \right)^2 \rightsquigarrow \omega^2$$

Portanto o fator $\mu_0 \rho \omega^2$ pode ser desprezado se $\omega \ll (v_A/R)(m/q + n)$, ou seja, quando estivermos próximos da estabilidade marginal. No entanto, próximo dos pontos singulares, ou seja, no entorno das superfícies magnéticas racionais onde

$$q = -\frac{m}{n},$$

esta desigualdade não será satisfeita para qualquer valor de ω não nulo. No entorno destes pontos o termo $\mu_0 \rho \omega^2$ tem que ser considerado.

Condições de regularidade na origem

Nós dissemos que os pontos singulares da equação de Newcomb são dados pelas soluções de $F=0$. Mas o termo de maior derivada da equação é também multiplicado por r^3 . Para evitar soluções singulares na origem, temos que analisar com cuidado a equação para $r \rightarrow 0$.

$$m \geq 2$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow f \approx \frac{F^2(0)}{m^2} r^3$$

$$g \approx \underbrace{\frac{2k^2}{m^2} \mu_0 \left. \frac{dp}{dr} \right|_0}_{\text{desprezível}} r^2 + \frac{m^2-1}{m^2} F^2(0) r - \underbrace{\frac{2k^2}{m^4} \left[\left(\frac{m}{r} B_\theta \right)^2 + (k B_z)^2 \right]_0}_{\text{desprezível}} r^3$$

$$\frac{F^2(0)}{m^2} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d\xi}{dr} - \frac{m^2-1}{m^2} F^2(0) r \xi = 0$$

$$\xi \sim r^\alpha$$

$$\frac{F^2(0)}{m^2} \alpha(\alpha+2) r^{\alpha+1} - \frac{m^2-1}{m^2} F^2(0) r^{\alpha+1} = 0$$

$$\alpha(\alpha+2) - (m^2-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = m-1} \Rightarrow \xi \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0 ; m \geq 2$$

$$m=0 \quad f(r) \approx \frac{F^2(0)}{k^2} r$$

$$g(r) \approx -\frac{F^2(0)}{k^2} \frac{1}{r} - \frac{2}{k^4} \left[\left(\frac{m}{r} B_\theta \right)^2 + (k B_z)^2 \right]_0 \frac{1}{r}$$

$$-\frac{F^2(0)}{k^2} \frac{d}{dr} r \frac{d\xi}{dr} + \left[\frac{F^2(0)}{k^2} - \frac{2}{k^4} \left\{ \left(\frac{m}{r} B_\theta \right)^2 + (k B_z)^2 \right\}_0 \right] \xi = 0$$

$$\xi \sim r^\alpha$$

$$-\frac{F^2(0)}{k^2} \alpha^2 r^{\alpha-1} + \left[\frac{F^2(0)}{k^2} - \frac{2}{k^4} \left\{ \left(\frac{m}{r} B_\theta \right)^2 + (k B_z)^2 \right\}_0 \right] r^{\alpha-1} = 0$$

$$\alpha \approx 1$$

$$\xi|_{r=0} \rightarrow 0, \quad M=0$$

$$m=1$$

$$f(r) \approx F^2(0) r^3$$

$$g(r) \approx 2k^2 \mu \left. \frac{dp}{dr} \right|_0 r^2$$

$$F^2(0) \frac{d}{dr} r^3 \frac{d\xi}{dr} - 2k^2 \mu \left. \frac{dp}{dr} \right|_0 r^2 \xi \approx 0$$

$$\xi \sim e^{ar^b} \quad \frac{d\xi}{dr} \sim ab r^{b-1} e^{ar^b}; \quad \frac{d}{dr} r^3 \frac{d\xi}{dr} \sim ab(b+2) r^{b+1} e^{ar^b} + a^2 b^2 r^{2b+1} e^{ar^b}$$

$$F^2(0) ab(b+2) r^{b+1} e^{ar^b} + F^2(0) a^2 b^2 r^{2b+1} e^{ar^b} - 2k^2 \mu \left. \frac{dp}{dr} \right|_0 r^2 e^{ar^b} \approx 0$$

$$b+1=2 \Rightarrow b=1$$

$$8a F^2(0) = 2k^2 \mu \left. \frac{dp}{dr} \right|_0 = \frac{\mu k^2}{F^2(0)} \left. \frac{dp}{dr} \right|_0$$

$$\xi|_{r=0} \sim e^{ar} \rightarrow \text{const}, \quad r=0$$

Forma Quadrática

No caso da instabilidade de Rayleigh-Taylor, nós vimos que a condição para instabilidade podia se derivada de forma simples, sem mesmo resolver a equação para ξ , através de uma forma quadrática. Infelizmente, devido a função $k(r)$ depender de ω^2 , não é imediato derivar uma forma quadrática para a equação de Hain-Lust. No entanto, supondo que estamos próximos da estabilidade marginal, $\omega^2 \rightarrow 0$, é possível ainda derivar algo parecido com uma forma quadrática. Multiplicando a equação por ξ e integrando por partes usando a condição de contorno

$$\xi = 0 \quad \text{em } r=0; r=a$$

ou

$$\frac{d\xi}{dr} = 0 \quad \text{em } r=0; r=a,$$

obtemos

$$-\int_0^a \left[f(r) \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + g \xi^2 \right] dr + \mu_0 \omega^2 \int_0^a \frac{\rho r}{m^2 + k^2 r^2} \left\{ \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \left[m^2 + k^2 r^2 - 1 + \frac{2kr^2}{m^2 + k^2 r^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{4kr^2}{F^2 \mu_0 \omega^2} \right] \xi^2 \right\} dr = 0$$

Note que para $m \geq 1$ e $\frac{d\rho}{dr} < 0$, o termo em colchetes é sempre positivo. Então o sinal de ω^2 dependerá do sinal de

$$\delta W = \int_0^a \left[f(r) \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + g \xi^2 \right] dr$$

$$\delta W < 0 \Rightarrow \text{instabilidade}; \quad \delta W > 0 \Rightarrow \text{estabilidade}.$$

Portanto, para verificar a estabilidade de uma configuração basta resolver a equação de Newcomb. Mais tarde, quando discutirmos o princípio de energia, veremos que este resultado é muito mais geral do que sugere o análise acima.

Solução da Equação de Newcomb no Entorno de um Ponto Singular

Crítério de Suydam

Vamos considerar a equação para estabilidade marginal ($\omega^2 = 0$) próximo de um ponto singular ($F = 0$). A equação de Newcomb é dada por

$$\text{onde } \frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

$$f = \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2}$$

$$g = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2 + k^2 r^2 - 1}{m^2 + k^2 r^2} r F^2 - \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{m}{r} B_\theta - k B_z \right) F.$$

A função $F (= \vec{k} \cdot \vec{B}_0)$ pode ser escrita como

$$F = \left(\frac{m}{r} B_\theta + k B_z \right) = B_z \left(\frac{m}{Rq} + k \right) ; \quad q \equiv \frac{r B_z}{R B_\theta} ; \quad R = \text{const.}$$

Os pontos singulares da equação são dados por

$$f = 0 \Rightarrow F(r_s) = 0 ; \quad r_s \neq 0$$

então, num ponto singular, $k = -\frac{m}{Rq}$. Se introduzirmos a variável

$$s = r - r_s,$$

temos

$$F(s) \approx \frac{dF}{dr} \Big|_{r_s} s = \left[\frac{dB_z}{dr} \left(\frac{m}{Rq} + k \right) - \frac{m B_z}{Rq^2} \frac{dq}{dr} \right]_{r_s} s = - \left(\frac{mq}{Rq^2} \frac{dq}{dr} \right)_{r_s} s$$

$$f \approx \frac{r_s^3 \left(\frac{m B_z}{Rq^2} \frac{dq}{dr} \right)^2}{m^2 + \frac{m^2 r_s^2}{R^2 q^2}} s^2 \quad \therefore \quad f \approx \frac{r_s^3 \left(\frac{B_z}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_s^2} s^2$$

$$g \approx \frac{2 \frac{m^2 r_s^2}{R^2 q^2}}{m^2 + \frac{m^2 r_s^2}{R^2 q^2}} \mu_0 \frac{dp}{dr} \quad \therefore \quad g \approx \frac{2 r_s^2}{R^2 q^2 + r_s^2} \mu_0 \left(\frac{dp}{dr} \right)_{r_s}$$

$$\therefore \frac{r_s^3 \left(\frac{B_z}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_s^2} \frac{d}{ds} s^2 \frac{d\xi}{ds} - \frac{2R^2}{R^2 q^2 + r_s^2} \mu_0 \left(\frac{dp}{dr} \right)_{r_s} \xi = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{ds} s^2 \frac{d\xi}{ds} + D_s \xi = 0} \quad ; \quad \boxed{D_s = - \left[\frac{2\mu_0 r \frac{dp}{dr}}{B_z^2} \left(\frac{q}{r \frac{dq}{dr}} \right)^2 \right]}$$

$\uparrow$ β $\uparrow$ "atrito"

A solução desta equação é dada por $\xi = s^p$, onde p satisfaz a equação indicial

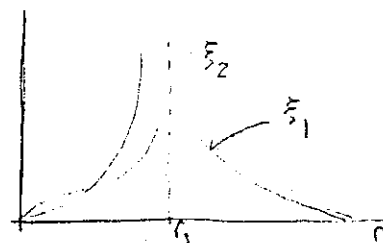
$$p(p+1) + D_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4D_s} \\ p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4D_s} \end{cases}$$

Existem duas possibilidades

$$\left. \begin{array}{l} \underline{1 - 4D_s > 0} \\ \xi_1 \sim s^{p_1} \\ \xi_2 \sim s^{p_2} \end{array} \right\} p_1 \neq p_2 \text{ reais} \Rightarrow \text{soluções não oscilantes}$$

$p_1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi_1$ pode divergir se $\sqrt{1 - 4D_s} < 1 \Rightarrow$ solução "pequena"

$p_2 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi_2$ sempre diverge $\Rightarrow$ solução "grande"



$$\underline{1 - 4D_s < 0} \quad w = \frac{1}{2} \sqrt{4D_s - 1} \quad p_1 = -\frac{1}{2} + i w$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} - i w$$

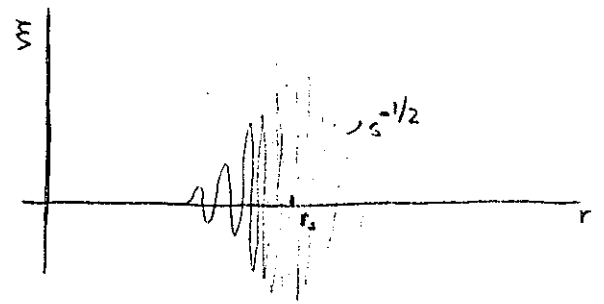
As soluções reais são dadas por

$$\xi_1 = s^{-\frac{1}{2} + i w} + s^{-\frac{1}{2} - i w} \quad ; \quad \xi_2 = i \left(s^{-\frac{1}{2} + i w} - s^{-\frac{1}{2} - i w} \right)$$

Notando que $s^{i\omega} = e^{i\ln s^\omega}$, temos

$$\xi_1 = 2s^{-\frac{1}{2}} \cos(\omega \ln s) \quad ; \quad \xi_2 = -2s^{-\frac{1}{2}} \sin(\omega \ln s)$$

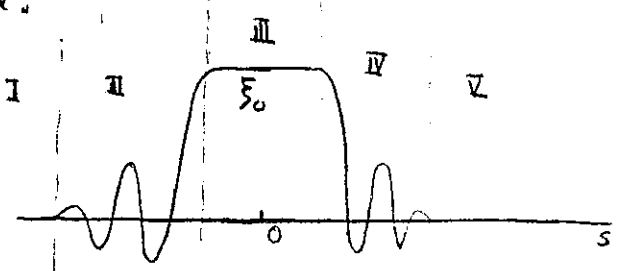
Portanto, quando $s \rightarrow 0$, as soluções oscilam cada vez mais rápidas e o invólucro diverge com $1/\sqrt{s}$. Com veremos adiante, estas soluções correspondem a uma instabilidade.



Para mostrar que as soluções oscilantes implicam em instabilidade, vamos construir uma função teste que faz $\delta W < 0$. Para $1 - 4D_3 > 0$, ou seja, $D_3 > 1/4$, as soluções oscilantes permitem construir uma solução teste que se anula fora de um intervalo pequeno no intorno da singularidade e que seja conectada através da singularidade por uma constante.

Na região I e V temos

$$\delta W_I = \delta W_V = 0.$$



Na região II, a contribuição a δW fica

$$\begin{aligned} \delta W_{II} &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{r_3^2 \left(\frac{R_2}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_3^2} s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + \frac{2r_3^2}{R^2 q^2 + r_3^2} \mu_0 \left(\frac{dp}{dr} \right)_c \xi^2 \right] ds \\ &= \frac{r_3^2 \left(\frac{R_2}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_3^2} \int_{s_1}^{s_2} \left[s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 - D_3 \xi^2 \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \left[s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 - D_3 \xi^2 \right] ds &= \int_{s_1}^{s_2} s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 ds + s^2 \xi \frac{d\xi}{ds} \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 ds = s^2 \xi \frac{d\xi}{ds} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0 \\ \uparrow \\ D_3 \xi &= - \frac{d}{ds} s^2 \frac{d\xi}{ds} \end{aligned}$$

Portanto $\delta W_{II} = 0$; da mesma forma $\delta W_{IV} = 0$.

Na região III :

$$\delta W_{III} = \frac{r_s^3 \left(\frac{B_z}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_s^2} \int_{s_2}^{s_3} \left[s^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 - D_s \xi^2 \right] ds = - \frac{r_s^3 \left(\frac{B_z}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2}{R^2 q^2 + r_s^2} D_s \xi_0^2 (s_3 - s_2)$$

Como $D_s > 1/4$ (solução oscilatória), $\delta W_{III} < 0$ que significa instabilidade.

Nota: Para verificar se $\delta W < 0$ com a função teste que usamos realmente significa instabilidade, vamos substituir a função teste na forma quadrática que derivamos com $\omega^2 \neq 0$. A integral que multiplica ω^2 pode ser escrita

$$\mu_0 \omega^2 \int_0^a \frac{\rho r}{m^2 + k^2 r^2} \left\{ \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \left[m^2 + k^2 r^2 - 1 + \frac{2kr^2}{m^2 + k^2 r^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{4k^2 \rho_0^2}{r^2 - \mu_0 \rho^2} \right] \xi^2 \right\} dr$$

$$\approx \mu_0 \rho \omega^2 \frac{\rho r_s}{m^2 + k^2 r_s^2} \left[m^2 + k^2 r_s^2 - 1 + \frac{2kr_s^2}{m^2 + k^2 r_s^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_s \right] \xi_0^2 (s_3 - s_2) - \frac{4k^2 r_s B_0^2}{m^2 + k^2 r_s^2} \xi_0^2 (s_3 - s_2),$$

onde consideramos que a maior contribuição para a integral vem da região $\xi \approx \xi_0 = \text{const}$. Substituindo na forma quadrática, obtemos

$$r_s^3 \left(\frac{B_0}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2 D_s - 4r_s B_0^2 + \mu_0 \rho \omega^2 H = 0$$

onde

$$H = \frac{r_s R^2 q^2}{m^2} \left[\frac{m^2 (R^2 q^2 + r_s^2)}{R^2 q^2} - 1 + \frac{2r_s^2}{R^2 q^2 + r_s^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_s \right] \quad (> 0; m \geq 1)$$

Usando a definição de q , temos $B_0 = \frac{r B_z}{Rq}$; portanto

$$\mu_0 \rho \omega^2 = - \frac{r_s B_z^2}{q H} \left[\left(r \frac{dq}{dr} \right)^2 D_s - 4 \frac{r_s^2}{R^2} \right]$$

Portanto o termo r_s^2/R^2 tem um efeito estabilizante. Num cilindro $r_s/R \rightarrow 0$ $\omega^2 < 0$ para $D_s > 1/4$, como suprimos. Num tokamak convencional r_s/R é pequeno mas não nulo, de forma que há um efeito estabilizante. Esta análise

não é, no entanto, totalmente correta porque $\xi = \text{const.}$ não é uma solução da equação de auto-valor para $\omega^2 \neq 0$.

Crítério de Suydam para que o plasma seja estável é necessário que

$$D_s < \frac{1}{4}$$

ou seja

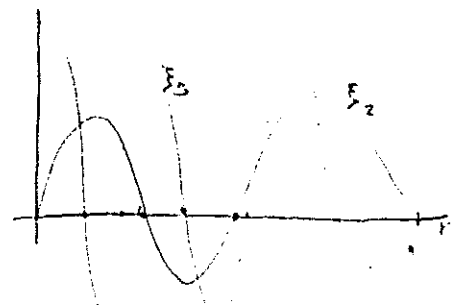
$$-\frac{2\mu_0 r \frac{dp}{dr}}{B_z^2} \left(\frac{q}{r \frac{dq}{dr}} \right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$-8 \frac{dp}{dr} < \frac{r B_z^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{r B_z^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2 + 8 \frac{dp}{dr} > 0}$$

Durante muito tempo se pensou que o critério de Suydam não era muito relevante porque ele simplesmente dava a condição para que não surgissem modos instáveis, altamente oscilatórios, ^{localizados} no intorno dos pontos singulares $F=0$. No entanto, em 1974, Goedbloed e Sakakura demonstraram um importante teorema para a equação geral de autovalor. Dadas duas autofunções ξ_{n_1} e ξ_{n_2} , correspondendo aos autovalores δ_{n_1} e δ_{n_2} ($\delta = i\omega$), onde n_1 e n_2 são os números de nós das autofunções correspondentes no intervalo $0 \leq r \leq a$, temos

$$n_2 < n_1 \Rightarrow \delta_{n_2} > \delta_{n_1}$$



Portanto, o maior autovalor corresponde a autofunção que só se anula em $r=0$ e $r=a$. Se um modo localizado altamente oscilatório existe, segundo o critério de Suydam, deve existir um modo global sem nós radiais e ele terá a maior taxa de crescimento δ .

Aproximação do "Tokamak Retificado"

Vamos novamente considerar a equação de modos normais que derivamos anteriormente

$$\frac{d}{dr} \left[f(r) + \frac{\mu_0 r^3 \gamma^2}{m^2 + k^2 r^2} \right] \frac{d\xi}{dr} - [g(r) + \mu_0 \rho r \gamma^2 h(r)] \xi = 0,$$

onde $\gamma = i\omega$ e

$$f(r) = \frac{r^3 F^2}{m^2 + k^2 r^2},$$

$$g(r) = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2 + k^2 r^2 - 1}{m^2 + k^2 r^2} r F^2 - \frac{2k^2 r^2}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{m}{r} B_\theta - k B_z \right) F.$$

$$h(r) = \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left[m^2 + k^2 r^2 - 1 + \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{4k^2 B_\theta^2}{F^2 + \mu_0 \rho^2} \right].$$

Se a coluna cilíndrica de plasma representar um tokamak de raio maior R , o comprimento de onda toroidal tem que ser um submúltiplo inteiro de $2\pi R$. Então podemos escrever

$$k = -\frac{n}{R}$$

$$F = m \frac{B_\theta}{r} \left[1 - \frac{n}{m} q \right]; \quad \frac{m}{r} B_\theta - k B_z = m \frac{B_\theta}{r} \left[1 + \frac{n}{m} q \right]; \quad q(r) = \frac{r B_z}{R B_\theta}.$$

Considerando um tokamak de grande razão de aspecto, temos

$$\frac{r}{R} \leq \frac{a}{R} \ll 1,$$

onde a é o raio menor da coluna de plasma. Então as funções f , g e h ficam

$$f(r) = \frac{r B_\theta^2 \left(1 - \frac{n}{m} q \right)^2}{1 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}}$$

$$g(r) = \frac{m^2 - 1}{1 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}} \frac{B_\theta^2}{r} \left(1 - \frac{n}{m} q \right)^2 + \frac{\frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}} \left[2\mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{B_\theta^2}{r} (m - nq)^2 - 2 \frac{B_\theta^2}{r} \left(1 - \frac{r^2}{m^2} q^2 \right) \right]$$

e

$$h(r) = \frac{1}{m^2(1 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2})} \left[m^2 - 1 + r^2 \frac{r^2}{R^2} + \frac{2 \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2}} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{4 n^2 \frac{B_0^2}{R^2}}{m^2 \frac{B_0^2}{R^2} (1 - \frac{n}{m} q)^2 + \mu_0 \rho \gamma^2} \right].$$

Considerando somente modos com $n/m \sim \mathcal{O}(1)$, temos que em mais baixa ordem em r/R

$$f(r) \approx r B_0^2 (1 - \frac{n}{m} q)^2$$

$$g(r) \approx (m^2 - 1) \frac{B_0^2}{r} (1 - \frac{n}{m} q)^2 + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2} \left[2\mu_0 \frac{d\rho}{dr} + \frac{B_0^2}{r} (m - nq)^2 - 2 \frac{B_0^2}{r} (1 - \frac{n^2}{m^2} q^2) \right]$$

$$h(r) \approx \frac{m^2 - 1}{m^2} + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R^2} \left[1 + \frac{2}{m^2} + \frac{4}{(1 - \frac{n}{m} q)^2 + \frac{\mu_0 r^2 \gamma^2}{m^2 B_0^2}} \right].$$

Notamos que a ordem do termo $g(r)$ depende do valor de m : para $m=1$, $g \sim \mathcal{O}(r^2/R^2)$ enquanto que para $m \geq 2$, $g \sim \mathcal{O}(1)$. Vamos considerar inicialmente modos $m \geq 2$; substituindo os termos de mais baixa na forma quadrática correspondente à equação de auto-valor, temos

$$\frac{\mu_0 \gamma^2}{m^2} \int_0^a \rho r \left[\left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \left\{ (m^2 - 1) + \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \right\} \xi^2 \right] dr = -\delta W$$

onde

$$\delta W = \int_0^a \frac{B_0^2}{r} (1 - \frac{n}{m} q)^2 \left[r^2 \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + (m^2 - 1) \xi^2 \right] dr.$$

Para que um dado modo seja instável devemos ter $\delta^2 > 0 \Rightarrow \delta W < 0$. Mas para $m \geq 2$ vemos que $\delta W > 0$ e, portanto, todos os modos internos com $m \geq 2$ são estáveis. Estamos considerando somente modos internos porque estamos supondo que $\xi(a) = 0$. Veremos mais tarde que quando a superfície ressonante para $m \geq 2$ cai fora da coluna de plasma, o modo pode ser instável.

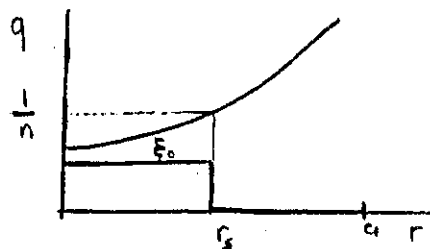
Vamos agora considerar especificamente o modo $m=1$, que recebe um nome especial: modo kink interno (ideal)

Modo Kink Interno - $m=1$

Se não considerarmos o termo proporcional a r^2/R^2 em $g(r)$, podemos tornar o modo marginalmente estável, $\delta W = 0 \Rightarrow \delta = 0$, com a função teste indicada na figura. Esta função teste satisfaz as condições de contorno apropriadas para $m=1$, ou seja,

$$\xi(0) = \text{const}$$

$$\xi(a) = 0$$



A discontinuidade na superfície ressonante é permitida porque este ponto é um ponto singular da equação para ξ . Guiados por este resultado, vamos resolver a equação para $m=1$. Neste caso, temos

$$h(r) \approx \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)$$

$$g(r) \approx n^2 \frac{r^2}{R^2} \left[2\mu_0 \frac{d\rho}{dr} + \frac{B_0^2}{r} (1-nq)^2 - 2 \frac{B_0^2}{r} (1-n^2 q^2) \right] = n^2 \frac{r^2}{R^2} \left[2\mu_0 \frac{d\rho}{dr} + \frac{B_0^2}{r} (3n^2 q^2 - 2nq - 1) \right]$$

Portanto a equação de auto-valor fica

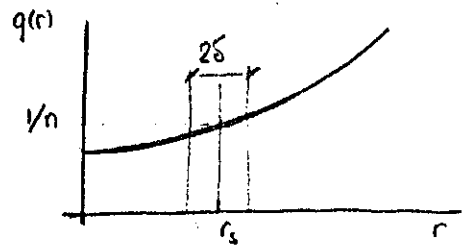
$$\frac{d}{dr} \left[r B_0^2 (1-nq)^2 + \mu_0 r^2 \rho^2 \right] \frac{d\xi}{dr} - \left[g(r) + \mu_0 \rho^2 r \left(-\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \right] \xi = 0 ; \quad \begin{array}{l} \xi(0) = \text{const} \\ \xi(a) = 0 \end{array}$$

$\sim O(r^2/R^2)$

Considerando o termo que multiplica a derivada mais alta, vemos que o termo de inércia só é importante próximo do ponto singular $q = 1/n$. Vamos aproveitar este fato para resolver a equação de auto-valor usando a técnica de camada limite, que será muito útil para o estudo de modos resistivos. Vamos considerar uma camada no entorno do ponto singular, que denominamos camada singular ou camada inercial, onde o termo de inércia é considerado. Fora desta camada desprezamos o inércia. Fazemos então um casamento assintótico da solução da equação de auto-valor fora da camada com a solução dentro. Este casamento determina o auto-valor, ou seja, δ .

Solução fora da camada

Fora da camada inicial a equação fica



$$\frac{d}{dr} [r B_0^2 (1-nq)^2] \frac{d\xi}{dr} - q\xi = 0 ; \quad \xi(0) = \text{constante} ; \quad \xi(a) = 0$$

$$q(r) = n^2 \frac{r^2}{R^2} \frac{B_0^2}{r} \left[\frac{2\mu_0 r \frac{dp}{dr}}{B_0^2} + 3n^2 q^2 - 2nq - 1 \right] \sim \theta(r^2/R^2)$$

Como q é $\theta(r^2/R^2)$ menor que outro termo da equação, procuramos uma solução desenvolvendo em potências de r^2/R^2 .

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots$$

$\sim 1 \quad \sim r^2/R^2$

Em ordem $(r^2/R^2)^0$ temos

$$\frac{d}{dr} r B_0^2 (1-nq)^2 \frac{d\xi_0}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = \text{const} ; \quad r \leq r_s - \delta$$

$$\xi_0 = 0 \quad ; \quad r \geq r_s - \delta$$

Em ordem $(r^2/R^2)^1$ temos

$$\frac{d}{dr} r B_0^2 (1-nq)^2 \frac{d\xi_1}{dr} - q\xi_0 = 0 \quad ; \quad r \leq r_s - \delta$$

$$\therefore \frac{d\xi_1}{dr} = \frac{1}{r B_0^2 (1-nq)^2} \int_0^r q \xi_0 dr \quad ; \quad r \leq r_s - \delta$$

$$\frac{d}{dr} r B_0^2 (1-nq)^2 \frac{d\xi_1}{dr} = 0 \quad ; \quad r \geq r_s - \delta$$

$$\frac{d\xi_1}{dr} = \frac{C}{r B_0^2 (1-nq)^2} ; \quad C = \text{const.} \quad ; \quad r \geq r_s - \delta$$

Solução dentro da camada

A solução dentro da camada tem que fazer a transição entre $\xi = \xi_0$ e $\xi = 0$. Portanto há uma forte variação de ξ e sua derivada fica o termo dominante na equação. Por isso basta considerarmos o termo de inércia na derivada mais alta e desprezarmos tanto q como $\rho\delta^2$ no termo que só multiplica ξ . Por outro lado, podemos aproximar q na camada pelo primeiro termo de seu desenvolvimento em série de Taylor, ou seja,

$$q \approx \frac{1}{n} + \left. \frac{dq}{dr} \right|_{r_3} s ; \quad s = r - r_3$$

Então a equação para ξ na camada fica

$$\frac{d}{ds} \left[r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2 s^2 + \mu_0 r_3^3 \rho \delta^2 \right] \frac{d\xi}{ds} \approx 0$$

$$\therefore \frac{d\xi}{ds} = \frac{C_1}{r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2 (s^2 + b^2)} ; \quad b^2 = \frac{\mu_0 r_3^3 \rho \delta^2}{B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2}$$

e

$$\xi = \frac{C_1}{r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{s}{b} + C_2$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas através do casamento assintótico (note que isto é diferente do casamento num ponto fixo, como fazemos por exemplo para determinar as soluções da equação de Schrödinger num poço de potencial)

$$s \rightarrow -\infty \Rightarrow \xi \rightarrow \xi_0 \quad \therefore - \frac{C_1}{r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \frac{1}{b} \frac{\pi}{2} + C_2 = \xi_0$$

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 0 \quad \therefore \frac{C_1}{r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \frac{1}{b} \frac{\pi}{2} + C_2 = 0$$

$$\therefore \frac{C_1}{r_3 B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} = - \frac{b}{\pi} \xi_0 ; \quad C_2 = \frac{\xi_0}{2}$$

Desta forma, a solução para ξ dentro da camada singular fica

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(r-r_s)}{b} \right]$$

Esta solução ainda não está completamente determinada porque b depende da taxa de crescimento γ , que é desconhecida. Para determinar b , fazemos o casamento da derivada da solução interna com a derivada da solução externa. Para a solução interna

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{C_1}{r_s B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2 (s^2 + b^2)} \quad \therefore \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d\xi}{ds} = - \frac{\xi_0}{\pi} \frac{b}{s^2}$$

Por outro lado, para a solução externa

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{r B_0^2 (1-nq)^2} \int_0^{r_s} g \xi_0 dr \quad \therefore \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{r_s B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \frac{\xi_0}{s^2} \int_0^{r_s} g dr$$

Iguando os dois limites, obtemos

$$- \frac{\xi_0}{\pi} \frac{b}{s^2} = \frac{1}{r_s B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \frac{\xi_0}{s^2} \int_0^{r_s} g dr$$

$$- \frac{\sqrt{\mu_0 \rho} r_s \gamma}{B_0 n \left(\frac{dq}{dr} \right)} = \frac{1}{r_s B_0^2 n^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2} \int_0^{r_s} g dr$$

$$\gamma = -n \left[\frac{\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}}{\left(r \frac{dq}{dr} \right)_r} \right] \frac{r_s^2}{R^2} \int_0^1 \frac{B_0^2(t)}{B_0^2(1)} \left[\frac{2\mu_0 t \frac{dp}{dt}}{B_0^2(t)} + (3n^2 q^2 - 2nq - 1) \right] t dt$$

onde $t = \frac{r}{r_s}$. Como $B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho} = V_{A0}$, podemos escrever finalmente

$$\gamma = -n \frac{\tau_H^{-1}}{\left(r \frac{dq}{dr} \right)_{r_s}} \frac{r_s^2}{R^2} \int_0^1 \frac{B_0^2(t)}{B_0^2(1)} \left[\frac{2\mu_0 t \frac{dp}{dt}}{B_0^2(t)} + (3n^2 q^2 - 2nq - 1) \right] t dt$$

Discussões sobre o modo kink interno

Para que a taxa de crescimento seja positiva, é necessário que a integral na expressão para γ seja negativa. Note que esta integral vem de

$$\delta W_0 = \int_0^a g \xi_0 dr,$$

ou seja, é devido à variação de energia associada ao deslocamento de mais baixa ordem.

O primeiro termo do integrando é proporcional a β_p e é negativo. ^{para perfil monótono de pressão}
No conduto, para que o integrando seja negativo, é condição necessária que

$$\beta_p \ll 1 \quad 3n^2q^2 - 2nq - 1 < 0$$

ou seja

$$-\frac{1}{3} < nq < 1$$

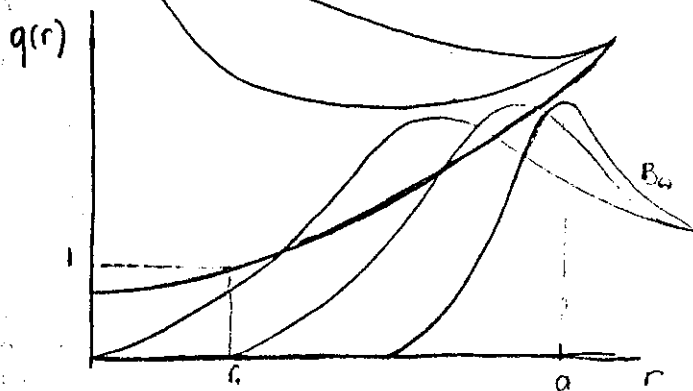
Portanto o modo primeiro ocorre quando $q = 1/n$ em algum ponto do plasma. Durante uma descarga normal, o valor de q

$$q = \frac{r B_z}{R B_\theta}$$

começa a decrescer no centro à medida que a corrente (e o campo poloidal) penetram no plasma. Como o valor de q no centro aproxima 1 a partir de valores mais altos, o primeiro modo a ser excitado é o modo $n=1$. Por isso o modo

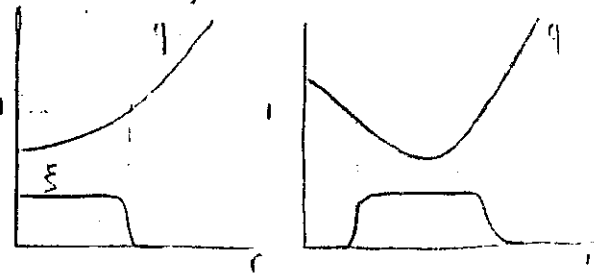
$$m=n=1$$

é o modo mais relevante e é denominado modo kink interno. Naturalmente o modo não fica instável imediatamente após $q(0)=1$ quando perfis torçâo são propriamente



incluídos (M.N. Bussac, R. Pellat, D. Edery, and J.L. Souk, Phys. Rev. Lett. 35, 1677 (1975)), o modo só fica instável após o valor de β_p ultrapassar um valor crítico que depende dos perfis de corrente. No entanto, quando efeitos resistivos são incluídos, o modo kink interno se torna novamente instável para qualquer valor de β_p e leva às chamadas oscilações "dry-die-dry", que discutiremos mais tarde.

Dependendo da forma do perfil de densidade de corrente durante o início da descarga, é possível o modo kink interno ficar instável numa região fora do eixo magnético, como mostrado na figura (V.D. Shafranov, Sov. Phys. Techn. Phys. 15, 175 (1970)).



O modo kink interno parece ir contra a intuição que desenvolvesmos no estudo da instabilidade de Rayleigh-Taylor e do critério de Suydam. As perturbações mais instáveis são sempre aquelas que flexionam o máximo possível as linhas de força. Em geometria plana, (em condições de contorno em $x \rightarrow \pm \infty$, isto significa que as perturbações têm que ser localizadas no interior de pontos singulares. A mesma condição leva ao critério de Suydam em geometria cilíndrica. Mas existe ainda uma outra possibilidade, como vimos para $m=1$. Um deslocamento rígido do eixo cilíndrico de plasma não flexiona nenhuma linha de força. O problema é que um deslocamento rígido não pode satisfazer a condição de contorno $\xi(r=a)=0$. A questão é então: como pode uma parte interna do cilindro se deslocar rigidamente e não flexionar as linhas de força? Para entender melhor a dinâmica deste modo, vamos calcular todas as grandezas perturbadas. Da condição $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$, temos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + i \frac{n}{r} \xi_\theta - i \frac{n}{R} \xi_z = 0$$

Por outro lado, as componentes do deslocamento perturbado também satisfazem a equação

$$-(\mu_0 \beta^2 + F') \left(i \frac{n}{r} \xi_z + i \frac{n}{R} \xi_\theta \right) = 2 \frac{n}{R} \frac{F p_0}{r} \xi_r$$

Para $m = n = 1$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{i}{r} \xi_\theta - \frac{i}{R} \xi_z = 0$$

$$(\mu_0 f \delta^2 + F^2) \left(\frac{i}{r} \xi_z + \frac{i}{R} \xi_\theta \right) = - \frac{2}{R} \frac{F P_0}{r} \xi_r \quad ; \quad F = \frac{P_0}{r} (1-q)$$

Fora da camada $\xi = \xi_0$ e desprezamos $f \delta^2$; então

$$\frac{1}{r} \xi_\theta - \frac{i}{R} \xi_z = - \frac{\xi_0}{r} \quad \Rightarrow \quad \xi_\theta \approx i \frac{r}{R} \left(1 + \frac{2}{1-q} \frac{r}{R} \right) \xi_0 ; \quad \xi_z \approx i \frac{1+q}{1-q} \xi_0$$

$$\frac{i}{R} \xi_\theta + \frac{i}{r} \xi_z = - \frac{2}{R(1-q)} \xi_0$$

Na camada, temos $F \approx 0$; $\frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) \approx r_s \frac{d\xi}{dr} = - r_s \frac{b}{\pi} \frac{\xi_0}{r^2 + b^2} \approx - \frac{r_s}{\pi b} \xi_0$

$$\frac{1}{r_s} \xi_\theta - \frac{i}{R} \xi_z = - \frac{1}{\pi b} \xi_0$$

$$\frac{i}{R} \xi_\theta - \frac{1}{r_s} \xi_z = 0$$

$$\Rightarrow \xi_\theta \approx i \frac{r_s}{\pi b} \xi_0 ; \quad \xi_z \approx \frac{r_s}{R} \xi_0$$

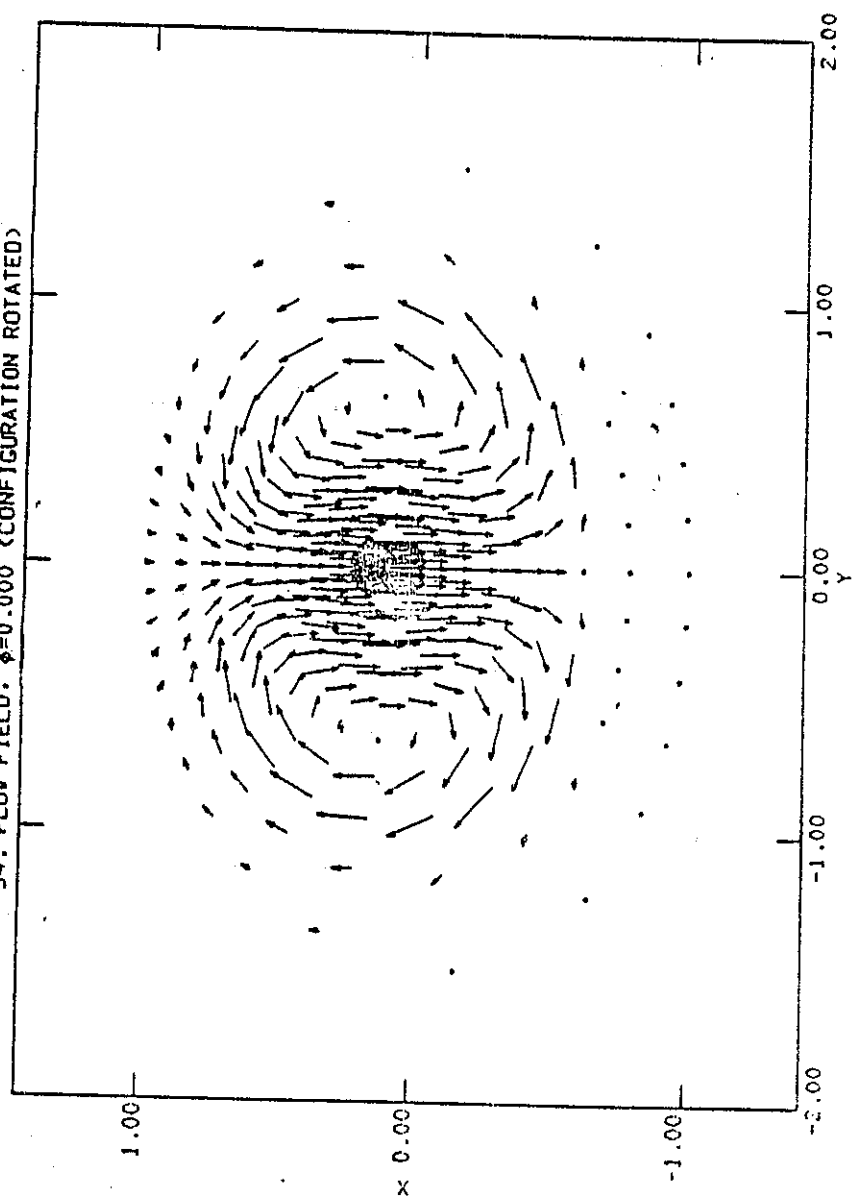
Portanto, $\xi_z > \xi_\theta$ fora da camada e $\xi_\theta > \xi_z$ dentro da camada singular.

Na camada singular, $\xi_r \rightarrow 0$, mas ξ_θ permanece finito, fechando o movimento convectivo do fluido. A expressão de ξ_0 na camada singular pode ainda ser escrita

$$\xi_\theta \approx i \frac{r_s}{\pi b} \xi_0 = i \frac{v_{A0}}{\pi \delta} \frac{dq}{dr} \xi_0 = i \left(r \frac{dq}{dr} \right)^2 \frac{\left(\frac{R}{r_s} \right)^2 \xi_0}{\pi \int_0^1 \frac{r_0^2}{R_0^2(r)} \left[\frac{r_0^2 r^2}{R_0^2(r)} + (3n^2 - 2r_0 \cdot 1) \right] dr} \xi_0$$

Portanto $\xi_\theta \gg \xi_0$ dentro da camada. O fator i significa que ξ_θ é defasado de $\pi/2$ em relação a ξ_r , ou seja, se $\xi_r \approx \xi_0 \cos 0$ em $r=0$, $\xi_\theta \approx \sin 0$. Na figura vemos a célula convectiva que é formada com o modo $m=1$, num tokamak de seção transversal elíptica.

#14729, TIME=48.00, EQUIL. & GLOBAL STABILITY
34. FLOW FIELD, $\phi=0.000$ (CONFIGURATION ROTATED)



HBT, P45B

Modo Kink Externo

Usando a equação de auto-valor para modos incompressíveis ($\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$), nós derivamos o critério de Suydam para estabilidade de modos localizados no entorno das superfícies singulares e estudamos o modo kink interno, $m=1$. Estes modos são caracterizados por serem internos, ou seja, a superfície do plasma não é perturbada. Por isso, a solução da equação de auto-valor foi simplificada impondo a condição de contorno $\xi = 0$ em $r=a$, a fronteira do plasma. Também é possível excitar modos internos com $m \geq 2$. Mas estes modos têm uma razão de crescimento muito pequena (V.D. Shafranov, Sov. Phys. Techn. Phys. 15, 175 (1970)).

Os modos internos geralmente ocasionam um aumento do transporte de energia para fora do plasma, algumas vezes de forma muito rápida, afetando significativamente as propriedades de confinamento de uma dada configuração de equilíbrio. No entanto, eles dificilmente destroem totalmente a configuração de equilíbrio.

Os modos externos, por outro lado, são muito violentos e podem destruir completamente uma dada configuração de equilíbrio. O modo kink externo $m=2$, por exemplo, é muitas vezes associado à híbrida instabilidade disruptiva que ocorre em tokamaks. Nós vamos agora resolver a equação de auto-valor para modos externos usando um simples modelo de equilíbrio com densidade de corrente constante. Para modelos mais sofisticados, a equação de auto-valor só pode ser resolvida por métodos numéricos.

Modelo de Equilíbrio

$$\vec{j} = j_0 \hat{e}_z ; j_0 = \text{const} ; r \leq a$$

$$= 0 ; r > a$$

$$B_z = \text{const}$$

$$\rho = \text{const}$$

$\Rightarrow$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 j_0}{2} r = B_\theta(a) \frac{r}{a} ; r \leq a$$

$$= \frac{\mu_0 j_0 a}{2} = B_\theta(a) \frac{a}{r} ; r > a$$

$$B_\theta(a) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2}$$

Da equação de equilíbrio obtemos

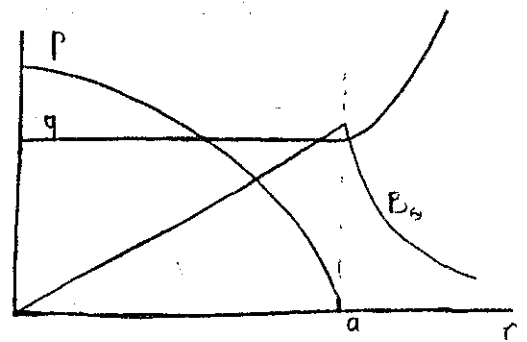
$$\frac{dp}{dr} = -2 \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Com a condição $p(r=a) = 0$, obtemos

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

onde

$$p_0 = \frac{B_\theta^2(a)}{\mu_0}$$



Por outro lado, é fácil verificar que

$$q = \frac{r B_\theta}{R B_\theta} = \text{const.}, \quad r \leq a; \quad q(r) = q(a) \frac{r^2}{a^2}; \quad r > a; \quad q(a) = \frac{a B_\theta}{R B_\theta}$$

Os perfis do modelo de equilíbrio estão indicados na figura.

Equação de auto-valor

A equação de auto-valor que temos que resolver é dada por

$$\frac{d}{dr} \left[f(r) + \frac{\mu_0 r^3 \delta^2}{m^2 + k^2 r^2} \right] \frac{d\xi}{dr} - [g(r) + \mu_0 (b^2 r h(r))] \xi = 0$$

onde

$$f(r) = \frac{r^3 F^2}{m^2 + k^2 r^2},$$

$$g(r) = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \mu_0 \frac{dp}{dr} + \frac{m^2 + k^2 r^2 - 1}{m^2 + k^2 r^2} r F^2 - \frac{2kr^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{m}{r} B_\theta - k B_\theta \right) F,$$

$$h(r) = \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left[m^2 + k^2 r^2 - 1 + \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{4k^2 B_\theta^2}{\mu_0 r^2 F^2} \right],$$

$$F = \frac{B_\theta}{r} \left(m + \frac{kr B_\theta}{B_\theta} \right)$$

$$\delta = i\omega.$$

Como no caso do modo kink interno, vamos supor $k = -n/R$ e

$r \ll R$. Neste caso, temos

$$F = \frac{B_0(a)}{a} (m - nq) = \text{const}$$

e, em uma baixa ordem em r/R ,

$$f \approx \frac{F^2}{m^2} r^3, \quad g \approx \frac{m^2 - 1}{m^2} F^2 r \quad \text{e} \quad h \approx \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

Substituindo estas expressões na equação de auto-valores, obtemos um fator comum $(F^2 + \mu_0 \rho \delta^2)/m^2$ que é simplificado e resulta a seguinte equação

$$\frac{d}{dr} r^3 \frac{d\xi}{dr} - (m^2 - 1) r \xi = 0.$$

A solução ^{geral} desta equação simples é dada por

$$\xi = c_1 r^{m-1} + c_2 r^{-m-1}$$

Em $r=0$ temos que impor a condição de que ξ seja finito; portanto $c_2 = 0$ e a solução interna fica

$$\boxed{\xi = c_1 r^{m-1}}$$

Campo perturbado no vácuo

A solução para a perturbação dentro do plasma deve satisfazer às condições de contorno apropriadas na fronteira do plasma $r=a$. Estas condições relacionam ξ com o campo magnético perturbado no vácuo:

$$\vec{Q}_v = -\nabla \phi_v; \quad \nabla^2 \phi_v = 0,$$

onde

$$\phi_v(r, \theta, t) = \phi_v(r) e^{im\theta + ikt}.$$

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\phi}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \phi = 0$$

Supondo $k^2 r^2 \ll 1$, obtemos

$$\frac{d}{dr} r \frac{d\phi}{dr} - \frac{m^2}{r} \phi = 0$$

cuja solução é

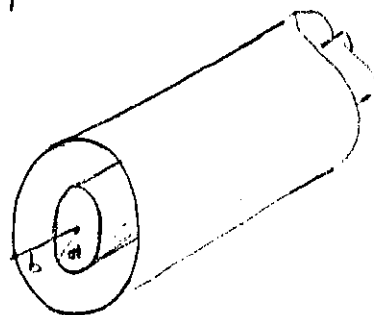
$$\phi(r) = d_1 r^m + d_2 r^{-m}$$

$$\vec{Q}_v = - \frac{d\phi}{dr} \hat{e}_r - i \frac{m}{r} \phi \hat{e}_\theta + i \frac{n}{R} \phi \hat{e}_z$$

Condições de contorno

Nós vamos supor que o cilindro de plasma está dentro de ^{uma} casca cilíndrica condutora perfurada em $r=b$.

Entre a superfície do plasma e a parede condutora existe vácuo. Na parede condutora a componente normal do campo perturbado tem que ser nula, ou seja



$$Q_{vr}|_{r=b} = 0 \Rightarrow d_1 b^{m-1} - d_2 b^{-m-1} = 0 \quad (1)$$

As condições na fronteira plasma-vácuo foram discutidas anteriormente; elas são dadas por

$$\hat{n}_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_v) = \hat{n}_0 \cdot \vec{Q}_v$$

$$-\delta\mu_0 p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B} \cdot (\vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}) = \vec{B}_v \cdot (\vec{Q}_v + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_v).$$

onde $\hat{n}_0 = \hat{e}_r$.

Calculando o termo do lado esquerdo da primeira condição, temos

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_v) &= \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{B}_v - \vec{B}_v \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{B}_v \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_v \\ &= iF \vec{\xi} - \frac{B_0 \xi_a}{r} \hat{e}_r + \frac{B_0 \xi_r}{r} \hat{e}_\theta + \frac{\xi_\theta B_0}{r} \hat{e}_r - \xi_r \frac{dB_0}{dr} \hat{e}_a\end{aligned}$$

Mas, para o campo do vácuo, temos $\frac{dB_0}{dr} = -\frac{B_0}{r}$; portanto

$$\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_v) = iF \vec{\xi}.$$

Substituindo este resultado na primeira condição de contorno, temos

$$iF \xi(a) = - \left. \frac{d\psi_v}{dr} \right|_{r=a} \quad (2)$$

Usando a expressão para ϕ_v , obtemos das equações (1) e (2) as expressões para d_1 e d_2 em termos de $\xi(a)$:

$$\boxed{d_1 = -i \frac{F \xi(a)}{m(a^{m-1} - \bar{a}^{m-1} b^{2m})}; \quad d_2 = -i \frac{F \xi(a) b^{2m}}{m(a^{m-1} - \bar{a}^{m-1} b^{2m})}}$$

Para aplicar a segunda condição de contorno, precisamos ser cuidadosos: não podemos fazer simplesmente $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ porque o limite incompatível corresponde a $\nabla \cdot \vec{\xi} \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow \infty$ de modo que o limite $\delta \nabla \cdot \vec{\xi}$ fica finito. A melhor forma de aplicar esta condição de contorno para casos incompatíveis é escrevê-la em termos da pressão perturbada π , ou seja,

$$-\delta p \nabla \cdot \vec{\xi} = \pi + \vec{\xi} \cdot \nabla p$$

de modo que a condição de contorno fica

$$\mu_0 \pi + \mu_0 \vec{\xi} \cdot \nabla p + \vec{B}_v \cdot (\vec{a} + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_v) = \vec{B}_v \cdot (\vec{a}_v + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_v)$$

Portanto necessitamos a expressão de Π em termos de $\vec{\xi}$. Na derivação da equação de modos normais, nos livramos de Π aplicando o operador $\nabla \times$ à equação

$$-(\mu_0 \rho \gamma^2 + F^2) \vec{\xi} = \mu_0 \nabla \left(\Pi + \frac{\vec{B} \cdot \vec{Q}}{\mu_0} \right) + 2 \frac{B_0}{r} \left(i F \xi_0 - r \vec{\xi} \frac{d}{dr} \frac{B_0}{r} \right) \hat{e}_r - 2 F \frac{B_0}{r} \vec{\xi} \hat{e}_z$$

Para o modelo de equilíbrio adotado, $d(B_0/r)/dr = 0$; denominando $P = \Pi + \vec{B} \cdot \vec{Q}/\mu_0$, temos que esta equação pode ser escrita na forma

$$A \vec{\xi} + B \hat{e}_z \times \vec{\xi} = -\mu_0 \nabla P$$

onde

$$A = \mu_0 \rho \gamma^2 + F^2 \quad e \quad B = -2i F \frac{B_0}{r}.$$

Portanto

$$A \xi - B \xi_0 = -\mu_0 \frac{dP}{dr}$$

$$A \xi_0 + B \xi = -\mu_0 i \frac{m}{r} P,$$

onde $\xi \equiv \xi_r$. Eliminando ξ_0 , obtemos a equação para P

$$(A^2 + B^2) \xi = -\mu_0 \left(A \frac{dP}{dr} + i \frac{m}{r} B P \right).$$

Como $\xi = \text{const. } r^{m-1}$, a solução desta equação é simplesmente $P = C \xi r$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$(A^2 + B^2) \xi = -\mu_0 m C (A + i B) \Rightarrow C = \frac{-1}{\mu_0 m} \left[\mu_0 \rho \gamma^2 + F^2 - 2 F \frac{B_0}{r} \right] \xi r,$$

ou seja

$$\boxed{P = \Pi + \frac{\vec{B} \cdot \vec{Q}}{\mu_0} = \frac{-1}{\mu_0 m} \left[\mu_0 \rho \gamma^2 + F^2 - 2 F \frac{B_0}{r} \right] \xi r}$$

Os outros termos que aparecem na condição de contorno são

$$\vec{\xi} \cdot \nabla p = \xi \frac{dp}{dr} = -2\xi \frac{B_0^2}{\mu_0 r}$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}) = \vec{B} \cdot \left(-\frac{B_0 \xi_0}{r} \hat{e}_r + \xi_r \frac{dB_0}{dr} \hat{e}_0 \right) = \xi B_0 \frac{dB_0}{dr} = \xi \frac{\mu_0^2}{r}$$

$$\vec{B}_v \cdot (\vec{Q}_v + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_v) = -iF\phi_v + \vec{B}_v \cdot \left(-\frac{\xi_0 B_0}{r} \hat{e}_r + \xi \frac{dB_0}{dr} \hat{e}_0 \right)$$

$$= -iF\phi_v + \xi B_0 \frac{dB_0}{dr} = -iF\phi_v - \xi \frac{B_0^2}{r}$$

(= $-\frac{B_0}{r}$ para o campo no vácuo)

Substituindo todos estes termos na segunda condição de contorno, temos

$$-\frac{a}{m} \left[\mu_0 \rho \chi^2 + F^2 - 2F \frac{B_0}{a} \right] \xi - 2 \frac{B_0^2}{a} \xi + \frac{B_0^2}{a} \xi = -iF(-i) \left[\frac{a^m}{a^{m-1} - a^{m-1} b^{2m}} + \right. \\ \left. + \frac{a^{-m} b^{2m}}{a^{m-1} - a^{m-1} b^{2m}} \right] \frac{F\xi}{m} - \xi \frac{B_0^2}{a}$$

$$-\frac{a}{m} \left[\mu_0 \rho \chi^2 + F^2 - 2F \frac{B_0}{a} \right] = \frac{F^2 a}{m} \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}},$$

donde obtemos finalmente a expressão para a razão de crescimento:

$$\boxed{\chi^2 = 2 \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho a^2} \left[(m - nq) - \frac{(m - nq)^2}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}} \right]}$$

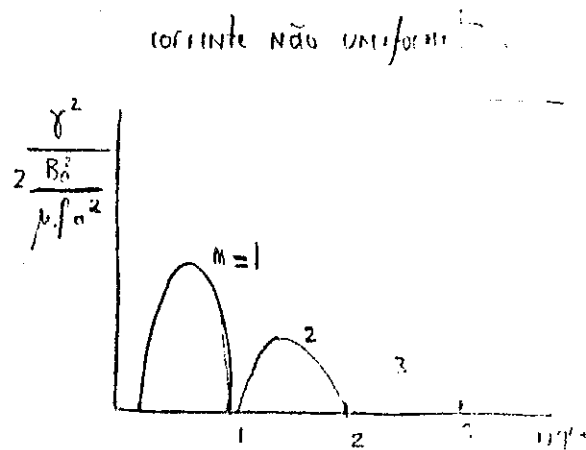
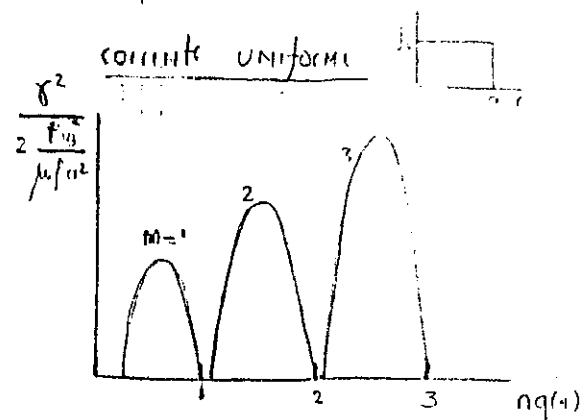
Desto expressão, vemos que o modo é instável ($\chi^2 > 0$) para

$$\boxed{m - 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} < nq < m}$$

e a máxima razão de crescimento é

$$\chi_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho a^2} \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} \right]$$

Para cada valor de m , o modo kink interno fica instável para valores de nq em quase toda a faixa entre $m-1$ e m . A existência da parede condutora, no entanto, introduz uma pequena janela de estabilidade; quanto mais próxima for a parede condutora do plasma ($a/b \rightarrow 1$), maior será a estabilidade. Conforme mostra o gráfico, a razão de crescimento δ aumenta com o valor de m . Isto, no entanto, é uma consequência do modelo de corrente constante que utilizamos. Na prática, o perfil de corrente não termina abruptamente na fronteira do plasma, mas decresce monotonicamente do centro para a periferia do plasma. Neste caso, Shafranov demonstrou usando um modelo simples (Sov. Phys. Tech. Phys. 15, 175 (1970)) que os modos com $m > 1$ têm taxas de crescimento decrescente com o valor de m . Este resultado foi confirmado em cálculos numéricos para tokamaks, com a inclusão do efeito toroidal. Estes cálculos indicam que para que os modos kink externos sejam estabilizados, é necessário que o gradiente do perfil de densidade de corrente seja nulo na periferia do plasma.



Existem duas características importantes dos modos kink externos que têm bastante relevância do ponto de vista experimental.

1. Rápido crescimento

Da expressão para δ^2 , vemos que

$$\delta \approx \tau_A^{-1}$$

onde τ_A é o tempo de Alfvén poloidal, ou seja,

$$\tau_A = \frac{a}{V_{A\theta}}, \quad V_{A\theta} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

Para o Tokamak TBR da USP, por exemplo, numa descarga em hidrogênio,

$$I_p = 10 \text{ kA}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$n_0 = 5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

$$\Rightarrow B_0 = 0,025 \text{ T}$$

$$\Rightarrow \tau_{A0} = 0,32 \text{ } \mu\text{s}$$

$$v_{A0} = 0,24 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Este resultado é típico: os modos kink crescem num tempo da ordem de μs . Por isso para detetá-los é necessário um sistema rápido; além disso, é bastante difícil desenvolver um sistema ativo de realimentação tão rápido para a estabilização dinâmica destes modos.

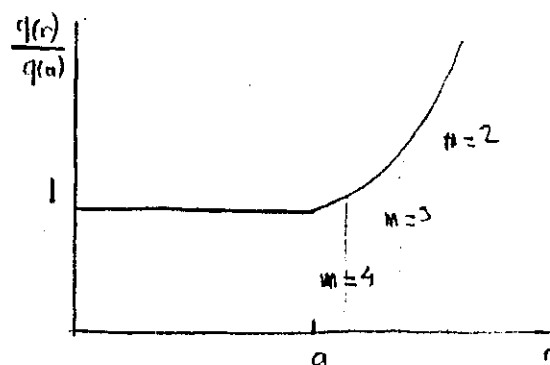
2. Campos perturbados localizados próximos à superfície do plasma.

Os campos perturbados associados aos modos kink internos têm máxima amplitude numa região próxima das superfícies ressonantes, dadas por

$$nq(r_s) = m \quad \therefore \quad q(r_s) = \frac{m}{n}$$

No nosso modelo de corrente uniforme, temos que

$$\frac{q(r)}{q(a)} = \frac{r^2}{a^2} \quad ; \quad r \geq a$$



e os modos são instáveis para

$$m - 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} < nq(a) < m.$$

Como é necessário que $q(a) < m/n$ para instabilidade, é claro que as superfícies ressonantes caem fora do plasma. Por outro lado, temos que

$$q(r_s) = q(a) \frac{r_s^2}{a^2} = \frac{m}{n} \quad \therefore \quad \frac{r_s^2}{a^2} = \frac{m}{nq(a)}$$

$$1 < \frac{r_s^2}{a^2} < \frac{m}{m - 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}}$$

Portanto, quanto maior for o valor de m , mais próximo da superfície do plasma estará a superfície ressonante. Isto significa que se utilizarmos detectores internos à coluna de plasma para medir o campo magnético perturbado, a amplitude do campo diminuirá com o valor de m .

Uma outra forma de vermos o mesmo efeito é considerarmos diretamente a expressão do campo magnético perturbado no vácuo. Em instalações experimentais, as componentes poloidal e radial do campo perturbado são medidas por pequenas bobinas distribuídas ao redor da coluna de plasma e próximas da parede da câmara de vácuo.

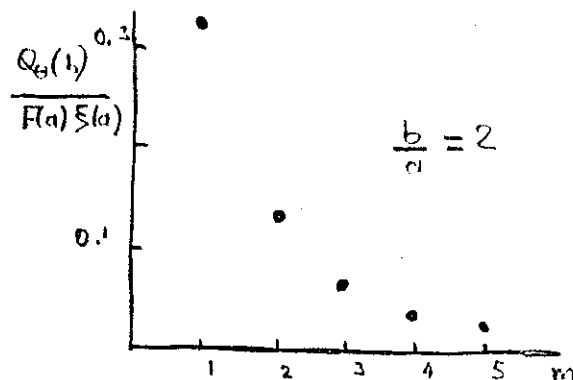
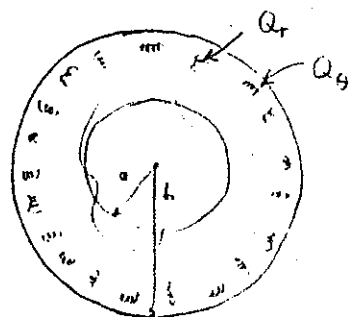
Vamos considerar as bobinas que medem a componente poloidal do campo perturbado, Q_θ , e supor que elas estejam localizadas praticamente na posição da parede condutora (naturalmente, nesta posição, $Q_r = 0$). A componente poloidal do campo perturbado é dada por

$$Q_\theta(r) = -i \frac{m}{r} \phi_v = -im [d_1 r^{m-1} + d_2 r^{-m-1}].$$

Usando as expressões para d_1 e d_2 que derivamos, obtemos

$$Q_\theta(b) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2m} - 1} E(a) \xi(a).$$

Portanto, quanto maior for o valor de m , menor será a amplitude de Q_θ nas bobinas detectoras. Este efeito tem que ser considerado em medidas experimentais.



Introdução a Instabilidades Resistivas

Até agora temos desprezado completamente o efeito da resistividade nas instabilidades magnetohidrodinâmicas. Lembrando nossa discussão geral sobre as equações da magnetohidrodinâmica, o argumento para desprezar os efeitos resistivos é que as instabilidades reais crescem na escala de tempo de Alfvén, τ_A , enquanto efeitos resistivos ocasionam uma difusão lenta na escala de tempo resistiva, τ_r , ou seja, $\tau_A \ll \tau_r$. Na realidade, agora já sabemos que a escala de tempo importante para as instabilidades ideais é o tempo de Alfvén poloidal

$$\tau_{A\theta} = \frac{a}{V_{A\theta}} \quad ; \quad V_{A\theta} = \frac{B_\theta}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

que é tipicamente da ordem de microssegundos. Por outro lado, o tempo de difusão resistiva numa coluna de plasma de raio a é dado por

$$\tau_r = \frac{a^2 \mu_0}{\eta} \quad ; \quad \eta = 5.3 \times 10^{-5} Z \ln \Lambda \left(\frac{T}{e} \right)^{-3/2} \quad (\Omega m)$$

Se considerarmos o mesmo exemplo do TBR do USP, temos

$$n_0 = 5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \quad \Rightarrow \quad \eta = 2.0 \times 10^{-6} \Omega m$$

$$T = 100 \text{ eV}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$Z \approx 2.5$$

$$\tau_r \approx 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\therefore \frac{\tau_{A\theta}}{\tau_r} = \frac{3.2 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-3}} \approx 1.6 \times 10^{-4}$$

Ou seja, as instabilidades ideais realmente são muito mais rápidas do que o tempo necessário para a difusão causada pela resistividade. Por esse argumento, portanto, parece que os fenômenos resistivos não são importantes.

No entanto, temos que lembrar um aspecto importante dos modos ideais. Quando a resistividade é desprezada, o campo magnético fica congelado no plasma e os modos ideais têm que distorcer as linhas de campo, o que requer muito energia. Desta forma, o crescimento

das linhas de força tem um forte efeito contra o surgimento de instabilidades, e os modos instáveis tendem a surgir próximo da superfície racional onde $\vec{R} \cdot \vec{B} = 0$. No entorno desta superfície singular podemos definir uma camada de pequena espessura onde o campo perturbado sofre uma grande variação. No caso do modo kink interno, por exemplo, a espessura desta camada é dado por

$$b = \frac{\gamma}{v_{A0} n \left(\frac{dq}{dr} \right)} r_s \approx \frac{r_s^2 / R^2}{\left(r \frac{dq}{dr} \right)^2} r_s$$

No caso do TBR, por exemplo, se colocarmos a superfície $q=1$ no meio da coluna de plasma ($r_s = 4 \text{ cm}$), temos ($R = 30 \text{ cm}$)

$$b \approx 0.07 \text{ cm}$$

O tempo de difusão resistiva através desta camada seria

$$\tau_r \approx \frac{b^2 \mu_0}{\eta} \approx 1.5 \times 10^{-7} \text{ seg.}$$

enquanto que o tempo característico para crescimento do modo kink interno seria

$$\tau \approx \delta^{-1} \approx \left(r \frac{dq}{dr} \right)_{r_s} \tau_{A0} \left(\frac{R}{r_s} \right)^2 \approx 9 \times 10^{-6} \text{ seg.}$$

Portanto o tempo de difusão resistiva através da camada pode ser menor que o tempo de crescimento do modo; neste caso é possível que efeitos resistivos sejam importantes.

Os efeitos principais da resistividade são desacoplar o movimento do fluido das linhas de força e permitir que estas se rompam e se reconectem, formando uma nova topologia da configuração de equilíbrio.

Para ver o efeito do desacoplamento entre fluido e campo, vamos discutir o modo gravitacional, ou modo de intercâmbio, que consideramos anteriormente em geometria plana. Considerando o campo de equilíbrio dado por

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z + B_y \hat{e}_y, \quad B_0 = \text{const.}, \quad B_y = B_y(x),$$

Nós vimos que o campo magnético perturbado fica dado por

$$i\omega \vec{B}_1 = -v_{1x} \frac{dB_0}{dx} \hat{e}_y - i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1,$$

de modo que o campo perturbado na direção de variação das grandezas de equilíbrio (ou seja, perpendicular ao campo de equilíbrio) é dado por

$$\omega B_{1x} = -(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) v_{1x}.$$

Se $\vec{B}_0$ tiver uma só direção em todo o espaço, podemos sempre orientar $\vec{k}$ de modo que $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ e a perturbação não irá distorcer as linhas de campo magnético. Este é simplesmente o resultado familiar de que um plasma num campo magnético plano unidirecional tem estabilidade neutra.

Num campo mais geral, com a componente $B_y(x)$, podemos dividir $\vec{B}_0$ numa componente ortogonal a $\vec{k}$, $\vec{B}_{0\perp}$, e outra paralela, $\vec{B}_{0\parallel}$,

$$\vec{B}_{0\perp} = \frac{\vec{k}}{k} \times [\vec{B}_0 \times \frac{\vec{k}}{k}] = \vec{B}_0 - (\vec{B}_0 \cdot \frac{\vec{k}}{k}) \frac{\vec{k}}{k}$$

$$\vec{B}_{0\parallel} = (\vec{B}_0 \cdot \frac{\vec{k}}{k}) \frac{\vec{k}}{k} = (k_y B_{0y} + k_z B_0) \frac{\vec{k}}{k^2}.$$

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ é válido para $\vec{B}_{0\parallel}$ e $\vec{B}_{0\perp}$ individualmente, podemos considerá-los como campos independentes. O comportamento da componente $\vec{B}_{0\perp}$ durante o modo de intercâmbio é o mesmo do campo unidirecional e portanto esta componente não tem nenhum efeito sobre a instabilidade.

A existência da componente $\vec{B}_{0\parallel}$, por outro lado, implica que a instabilidade terá que distorcer as linhas de campo através da geração de B_{1x} e, portanto, aumentar a energia magnética do sistema. Desta maneira, o cisalhamento das linhas de força tem um efeito estabilizante sobre o modo de intercâmbio; num plasma condutor perfeito, é necessário uma força desestabilizadora não nula para sobrepor o efeito estabilizador do cisalhamento.

Vamos agora verificar o efeito do desacoplamento fluido-campo induzido pela resistividade. Não existe necessidade de considerar o desacoplamento de $\vec{B}_{0\perp}$, porque este não impede o movimento. Então vamos restringir nossas considerações a $\vec{B}_{0\parallel}$. A lei de Ohm é dada por

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad \therefore \quad \vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B}_{0\parallel} = \eta \vec{j}_1$$

Uma condição suficiente para o desacoplamento é que não seja induzido um campo elétrico, ou seja, $E_{\perp} = 0$; neste caso a corrente perturbada fica dada por

$$\vec{j}_1 = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{B}_{0\parallel}}{\eta}$$

e a força restauradora será

$$\vec{F}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B}_{0\parallel} = -\frac{1}{\eta} [B_{0\parallel}^2 \vec{v}_1 - (\vec{B}_{0\parallel} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_{0\parallel}]$$

Portanto a componente x da força restauradora será

$$F_{1x} = -\frac{v_{1x} B_{0\parallel}^2}{\eta}$$

Para $\eta \rightarrow 0$, temos que $-F_{1x}/v_{1x}$ se torna infinito em todo o espaço, excepto nos pontos onde $B_{0\parallel}$ se anula. Para η não nulo, no entanto, existe uma região de largura $\epsilon \neq 0$ no intorno dos nulos de $B_{0\parallel}$, onde a força restauradora é arbitrariamente pequena. Para estimar a largura ϵ , vamos recordar que a força desestabilizadora na instabilidade de Rayleigh-Taylor é dada por

$$\vec{F}_{g1} = \rho_1 \vec{g}$$

mas, da equação da continuidade, nós vimos que

$$\rho_1 = \frac{1}{\omega} \frac{df_0}{dx} v_{1x}$$

Portanto

$$F_{g1} = \frac{1}{\gamma} v_{1x} g \frac{df_0}{dx}$$

No ponto onde B_{0y} se anula, temos $B_{0y} \approx \epsilon dB_{0y}/dx$. Comparando os valores de F_{yx} e F_{gy} , vemos que esta última sobrepõe a força estabilizadora do cisalhamento numa região de largura

$$\epsilon = \left[\frac{\eta |g \frac{d\rho_0}{dx}|}{\delta \left(\frac{dB_{0y}}{dx} \right)^2} \right]^{1/2}.$$

A razão de crescimento da instabilidade de Rayleigh-Taylor na presença de resistividade pode ser estimada através de um argumento energético simples. O trabalho realizado pela força por unidade de tempo (por unidade de volume) é dado por

$$\frac{dw}{dt} = v_{ix} F_{gy}$$

Este trabalho tem que ser igual ao aumento de energia cinética por unidade de tempo, ou seja,

$$\frac{de}{dt} = \gamma \rho_0 (v_{ix}^2 + v_{iy}^2)$$

Da condição de incompressibilidade, temos.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{dv_{ix}}{dx} + ik v_{iy} = 0$$

$$\frac{v_{ix}}{\epsilon} \approx k v_{iy}$$

$$\frac{de}{dt} = \gamma \rho_0 \left(1 + \frac{1}{k^2 \epsilon^2} \right) v_{ix}^2 \approx \gamma \rho_0 \frac{v_{ix}^2}{k^2 \epsilon^2} \quad (k\epsilon \ll 1 \text{ para grandes comprimentos de onda})$$

Portanto

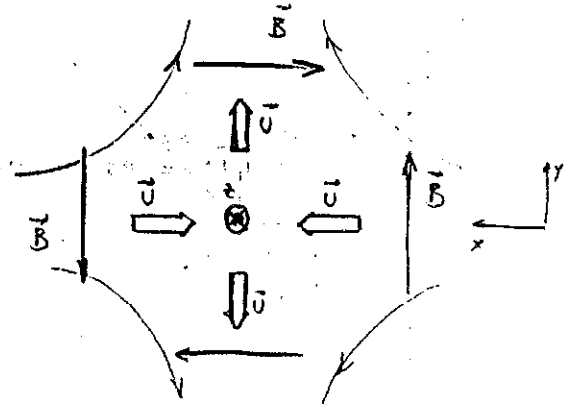
$$\frac{de}{dt} \approx \frac{dw}{dt} \Rightarrow \gamma \rho_0 \frac{v_{ix}^2}{k^2 \epsilon^2} = v_{ix}^2 \frac{g}{\gamma} \frac{d\rho_0}{dx}$$

$$\gamma \rho_0 \frac{\delta \left(\frac{dB_{0y}}{dx} \right)^2}{k^2 \eta |g \frac{d\rho_0}{dx}|} \approx \frac{g}{\gamma} \frac{d\rho_0}{dx}$$

$$\delta \approx \left[\frac{k^2 \eta \left(g \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2}{\rho_0 \left(\frac{dB_{0y}}{dx} \right)^2} \right]^{1/3}$$

O efeito da resistividade não é importante somente em plasmas de laboratório. Em plasmas astrofísicos, por exemplo, considerar o efeito da resistividade (ou de algum mecanismo dissipativo) é essencial para explicar fenômenos de rompimento e reconexão de linhas de força.

Vamos inicialmente considerar o chamado modelo do ponto X, muito usado em astrofísica, como por exemplo para explicar as erupções solares. Neste modelo, se considera que dois plasmas com resistividade praticamente nula se aproximam em direção a um ponto comum, levando consigo campos magnéticos opostos. Os dois fluidos então se afastam em direção perpendicular à de incidência, mudando também a direção do campo (veja figura). Para esta configuração, é claro que mesmo se não houver colisão, um regime estacionário não pode existir com $\eta = 0$. Em regime estacionário, devemos ter



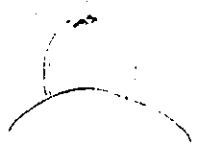
$$\nabla \times \vec{E} = 0,$$

Considerando $E_x = E_y = 0$, temos $E_z = \text{constante}$. Mas, com $\eta = 0$, o campo elétrico se movendo com o fluido deve ser nulo, ou seja,

$$E_z + vB = 0$$

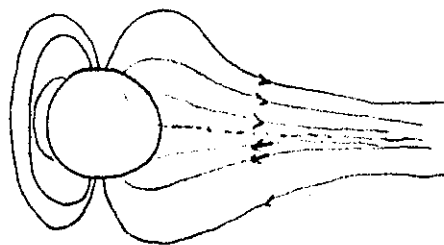
Em todos os pontos, fora o centro, $v \neq 0$ e, portanto $E_z \neq 0$. Mas no centro, $v = 0 \Rightarrow E_z = 0$, que é uma contradição. A única maneira de solucionar esta inconsistência é supor uma pequena resistividade que é desprezável fora do centro. Mas em $v = 0$, esta resistividade dá origem a uma alta corrente

$$j_z = \frac{E_z}{\eta}.$$

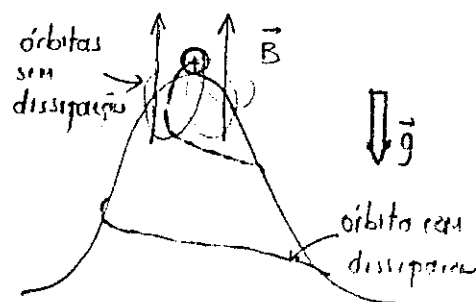


No caso das explosões solares, esta corrente circular no laço da coroa solar.

Um outro processo astrofísico onde o efeito da resistividade é importante é o de reconexão magnética na cauda geomagnética. Na face oposta ao sol, o campo magnético da terra forma uma longa cauda que se estende para o espaço. No plano meridiano da cauda a direcção do campo magnético se inverte, devido a uma camada de corrente no plasma espacial. Nesta região surgem instabilidades resistivas que tendem a fazer a reconexão das linhas de força na cauda.



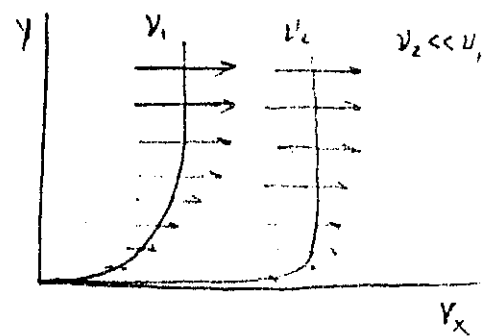
Uma pergunta que às vezes preocupa os alunos quando começam a estudar as instabilidades resistivas é a seguinte. Suponha que um plasma seja estável com relação aos modos magnetohidrodinâmicos ideais ($\eta \rightarrow 0$). Quando introduzimos a resistividade, estamos introduzindo um processo dissipativo que transforma parte da energia livre do sistema em calor. Como é possível então o sistema ficar instável? Para entender o mecanismo da instabilidade, vamos considerar um sistema mecânico simples. Considere uma pequena esfera no cume de uma pequena colina, na presença da gravidade. Naturalmente este sistema é instável. Para tornar o sistema estável, supondo que a esfera e a colina sejam isolantes, podemos carregar a esfera com uma carga elétrica e sobrepor um campo magnético $\vec{B} \parallel \vec{g}$. Neste caso, a esfera passa a ter um movimento estável, como indica a figura. No entanto, se houver dissipação, ou seja, atrito entre a esfera e a colina, o sistema se torna novamente instável e a esfera desce. A dissipação permite que a energia livre do sistema, ou seja, a energia gravitacional, seja liberada mesmo na presença do campo magnético.



Intermezzo Matemático: Teoria de Camada Limite

A resistividade de plasmas é geralmente muito pequena mas, do ponto de vista matemático, ela tem uma característica importante. A inclusão da resistividade nas equações MHD aumenta a ordem dessas equações, ou seja, com a resistividade aparecem derivadas de mais alta ordem do que sem a resistividade. Se considerarmos a resistividade pequena e quisermos encontrar uma solução desenvolvendo em potências da resistividade, teremos o problema de que a solução de menor ordem vem de uma equação de ordem inferior à equação original. Por outro lado, o parâmetro pequeno será importante exatamente onde a solução sofrer a maior variação. Isto caracteriza um problema de perturbação singular.

A técnica perturbativa para resolver este tipo de problema é denominada teoria de camada limite e foi originada em mecânica dos fluidos. Por exemplo, consideremos o fluxo de um fluido viscoso sobre uma placa plana e vamos supor que a viscosidade ν do fluido seja pequena. A uma grande distância da placa, a velocidade de fluxo é uniforme e a viscosidade não é relevante (o termo viscoso na equação de Navier-Stokes é proporcional a $\nu d^2u/dx^2$).



A fricção com a placa requer que a velocidade seja nula na placa. O limite singular que dá origem à camada limite surge quando $\nu \rightarrow 0$. Quando $\nu > 0$, a equação diferencial para a velocidade de deslocamento é de quarta ordem, enquanto que para $\nu = 0$ a equação cai para terceira ordem, de forma que uma condição de contorno é perdida. É necessário então introduzir uma camada limite para satisfazer todas as condições de contorno.

Exemplo: vamos considerar a equação

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1,$$

onde

$$\epsilon \ll 1.$$

Se tentarmos uma solução perturbativa, do tipo

$$y(x) := y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots,$$

teríamos em ordem zero

$$\frac{dy_0}{dx} = 0 \Rightarrow y_0 = C = \text{const.},$$

portanto se impormos $y_0(0) = 0$, a condição de contorno em $x=1$ não pode ser satisfeita e vice-versa, ou seja, uma condição de contorno foi perdida! No entanto é claro que a solução geral da equação, sem usar o método perturbativo existe satisfazendo as duas condições de contorno:

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0;$$

seja

$$\xi = \frac{dy}{dx}$$

então

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{\xi}{\epsilon} = 0 \Rightarrow \xi = \text{const.} e^{\frac{x}{\epsilon}}.$$

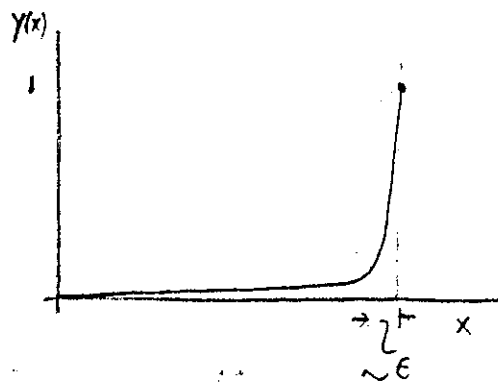
Como $y = \text{const.}$ também é solução, a solução geral da equação é

$$y(x) = A + B e^{\frac{x}{\epsilon}}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow A + B e^{1/\epsilon} = 1$$

$$y(x) = \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1}$$



O comportamento da solução mostra claramente o que está acontecendo: só numa distância do ordem de ϵ do ponto $x=1$, o parâmetro ϵ fica importante porque a derivada segunda da solução varia muito. Isto caracteriza uma camada limite.

Técnica de Solução

A ideia básica do método de camada limite é considerar uma camada no intorno do ponto onde o aspecto singular da solução aparece. Fora da camada, o termo pequeno é desprezado e a solução que satisfaz a condição de contorno apropriada é encontrada. Dentro da camada, o termo pequeno é mantido e a variável independente é rescalonada de modo que o termo com ϵ fique da ordem dos outros termos. A solução interna (dentro da camada) é encontrada. Finalmente se faz o casamento assintótico das soluções externo e interna.

Exemplo: Consideremos a solução da seguinte equação

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$$

onde

$$y(0) = A; \quad y(1) = B; \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Vamos supor que $a(x) \neq 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e que $a(0) > 0$. Neste caso veremos que existe uma camada limite em $x=0$.

Fora da camada limite, desprezamos ϵ e a equação fica

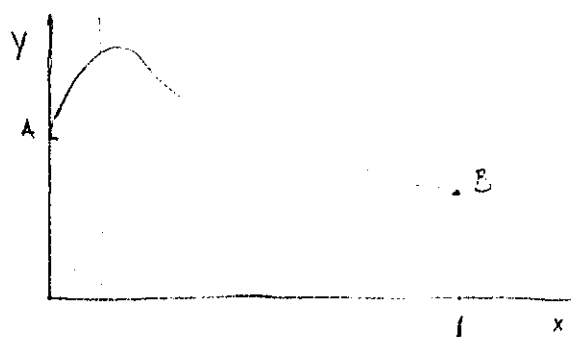
$$a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$$

cuja solução é

$$y(x) = C e^{-\int_0^x \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

$$x=1 \Rightarrow y(1) = B = C e^{-\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} \quad \therefore C = B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

$$y(x) = B e^{\int_x^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$



Supondo que $a(x)$ e $b(x)$ sejam bem comportados em $x=0$, próximo da origem podemos escrever

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ; \quad (a_0 > 0 \text{ por hipótese})$$

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Então, dentro da camada limite podemos escrever

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + a_0 \frac{dy}{dx} + b_0 y = 0$$

Vamos agora introduzir uma variável interna à camada, de modo que o termo $\epsilon d^2 y / dx^2$ fique da ordem de pelo menos algum outro termo da equação. Escrevemos então:

$$\chi = \epsilon^\alpha x$$

onde χ é a variável interna e α uma constante a ser determinada. Substituindo na equação, temos

$$\epsilon^{1+2\alpha} \frac{d^2 y}{d\chi^2} + a_0 \epsilon^\alpha \frac{dy}{d\chi} + b_0 y = 0$$

ou

$$\frac{d^2 y}{d\chi^2} + a_0 \epsilon^{-(\alpha+1)} \frac{dy}{d\chi} + b_0 \epsilon^{-(2\alpha+1)} y = 0$$

Se escolhermos $\alpha = -1/2$ para balancear o primeiro e o último termo, obtemos que o segundo termo fica proporcional a $\epsilon^{-1/2}$ sendo portanto maior que os outros dois. Por outro lado, escolhendo

$$\alpha = -1$$

obtemos

$$\frac{d^2 y}{d\chi^2} + a_0 \frac{dy}{d\chi} + b_0 \epsilon y = 0 ,$$

de modo que o primeiro e segundo termo se contrabalançam e o terceiro pode ser desprezado no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Temos então

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_0 \frac{dy}{dx} = 0$$

A solução desta equação é

$$y(x) = \alpha + \beta e^{-a_0 x}$$

$$y(0) = A \Rightarrow y(x) = A + \beta(e^{-a_0 x} - 1)$$

ou

$$y_i(x) = A + \beta(e^{-\frac{a_0 x}{\epsilon}} - 1)$$

Esta solução na camada limite salta de $y = A$ a $y = A - \beta$ numa distância da ordem de ϵ/a_0 .

Casamento assintótico

A solução interna, quando $x \gg \epsilon$ tende para o valor

$$y_i(x) \rightarrow A - \beta ; x \gg \epsilon , x \ll 1 ;$$

enquanto que a solução externa, quando $x \rightarrow 0$ ($x \gg \epsilon$) tende para o valor

$$y_e(x) \rightarrow B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} ; x \rightarrow 0 (x \gg \epsilon)$$

Impondo o casamento das duas soluções, temos

$$A - \beta = B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt},$$

ou seja,

$$\beta = A - B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt}.$$

[Notamos que se $a_0 < 0$, a solução interna crescerá com $e^{1a_0 x/\epsilon}$ e o caso limite seria impossível; neste caso a condição de contorno estaria em $x=1$].

A solução do problema, até ordem ϵ , fica então

solução interna:

$$y(x) = B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} + e^{-\frac{a_0 x}{\epsilon}} \left(A - B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} \right)$$

solução externa:

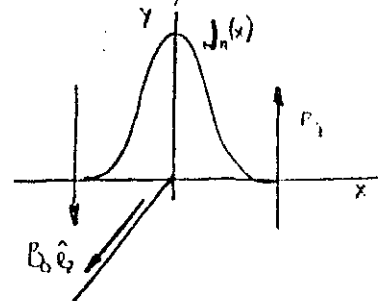
$$y(x) = B e^{\int_x^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

Estas duas soluções podem ser combinadas numa única aproximação unificada, válida até ordem ϵ para todo x no intervalo $(0,1)$

$$y(x) = B e^{\int_x^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} + \left[A - B e^{\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt} \right] e^{-\frac{a_0 x}{\epsilon}}$$

Instabilidade de Ruptura (tearing) numa camada de corrente

Vamos considerar um modelo de uma configuração de equilíbrio que é comum tanto a plasmas de laboratório como espaciais. Uma folha de corrente, localizada no intorno do ponto $x=0$ flui ao longo do eixo z , paralelo a um campo magnético $B_0 = \text{const.}$ O campo produzido pela folha de corrente inverte de sentido em $x=0$. Supomos, além disso que todas as grandezas de equilíbrio só dependam de x . Se não houver gravidade na direcção da inhomogeneidade, este sistema é marginalmente estável a modos magnetohidrodinâmicos ideais. No entanto, a resistividade dá origem a uma instabilidade que rompe os linhas de força opostas e as reconecta, formando ilhas magnéticas ao longo do eixo y .



A configuração de equilíbrio é dada por

$$\vec{B} = (\vec{B}_\perp, B_0 \hat{e}_z) ; B_0 \gg B_\perp \quad (\text{por hipótese})$$

$$B_0 = \text{const.}, \quad B_\perp = B_\perp(x)$$

$$v_0 = 0$$

Equação para os campos

Da equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, podemos escrever

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \hat{e}_z + B_0 \hat{e}_z,$$

como vimos no equilíbrio magnetohidrodinâmico. No entanto, a função ψ vai representar tanto o campo de equilíbrio como o campo perturbado.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \psi \times \hat{e}_z) + \nabla \cdot (B_0 \hat{e}_z) = \hat{e}_z \cdot \nabla \times (\nabla \psi) - \nabla \psi \cdot \nabla \times \hat{e}_z = 0 \quad \checkmark$$

A equação para ψ sai da lei de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \therefore \quad \nabla \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z) = \mu_0 \vec{j}$$

$$- \hat{e}_z \nabla^2 \psi + \nabla \psi (\nabla \cdot \hat{e}_z) - (\nabla \psi \cdot \nabla) \hat{e}_z + (\hat{e}_z \cdot \nabla) \nabla \psi = \mu_0 \vec{j} \hat{e}_z$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = -\mu_0 j \hat{e}_z}$$

Nós vamos supor que o movimento do plasma (até perturbações não-lineares) é incompressível e perpendicular a $B_0 \hat{e}_z$. Como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, podemos também escrever

$$\boxed{\vec{v} = \nabla \phi \times \hat{e}_z}$$

onde ϕ é alguma coisa denominada vorticidade mas pode também ser interpretado como proporcional a um potencial eletrostático. Para verificar isto, vamos lembrar que a velocidade de deriva ocasionada por um campo elétrico é dada por

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}_0}{B_0^2} = \frac{1}{B_0} \vec{E} \times \hat{e}_z = -\frac{1}{B_0} \nabla \phi \times \hat{e}_z \quad \therefore \quad \phi_e = -B_0 \phi$$

Para determinar a equação de evolução para ψ , vamos combinar a lei de Ohm com a lei de Faraday

$$\begin{cases} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} & \Rightarrow E_{||} = \eta j \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times (\eta \vec{j} - \vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \psi \times \hat{e}_z) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\psi \hat{e}_z) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \hat{e}_z \right)$$

$$\nabla \times \left(\eta \vec{j} - \vec{v} \times \vec{B} + \hat{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0 = -\nabla \times (\nabla \Phi) ; \Phi \text{ escalar}$$

$$\therefore \eta \vec{j} - \underbrace{\vec{v} \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z + B_0 \hat{e}_z)}_{=0} + \hat{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

$$\vec{v} \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z) = (\vec{v} \cdot \hat{e}_z) \nabla \psi - (\vec{v} \cdot \nabla \psi) \hat{e}_z$$

$$\eta \vec{j} + (\vec{v} \cdot \nabla \psi) \hat{e}_z + \hat{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \psi = -\eta j + E_0} \quad (E_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t})$$

onde E_0 é o campo elétrico aplicado ao longo de $\vec{B}_0$ para manter um equilíbrio resistivo.

Equação para a função de fluxo ϕ

$$\vec{v} = \nabla \phi \times \hat{e}_z$$

Da equação do movimento, temos

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

$\therefore$

$$\nabla \times \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} \right] = \nabla \times (\vec{j} \times \vec{B})$$

Como o operador $\vec{v} \cdot \nabla$ é um escalar, temos

$$\nabla \times [\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) (\nabla \times \vec{v}) + [\nabla \rho (\vec{v} \cdot \nabla)] \times \vec{v}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla \phi \times \hat{e}_z) = -\hat{e}_z \nabla^2 \phi + \nabla \phi (\vec{v} \cdot \hat{e}_z) - (\nabla \phi \cdot \vec{v}) \hat{e}_z - (\hat{e}_z \cdot \nabla) \nabla \phi$$

$$\nabla \times \vec{v} = -\hat{e}_z \nabla^2 \phi \quad \quad \quad \neq \pm \nabla^2 \phi$$

Para calcular $[\nabla \rho (\vec{v} \cdot \nabla)] \times \vec{v}$, vamos considerar $\rho = \text{const.}$ Então o primeiro

∇ opera somente no primeiro $\vec{v}$, ou seja,

$$\begin{aligned} [\nabla(\vec{v} \cdot \nabla)] \times \vec{v} &= \left[(\nabla v_x) \frac{\partial}{\partial x} + (\nabla v_y) \frac{\partial}{\partial y} \right] \times \vec{v} \\ &= \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{e}_y \right] \times \vec{v} \\ &= \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \hat{e}_z \end{aligned}$$

Mas, de $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, (com $v_z = 0$), temos

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Substituindo na expressão acima, obtemos

$$[\nabla(\vec{v} \cdot \nabla)] \times \vec{v} = 0$$

e, portanto,

$$\nabla \times \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} \right] = - \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \hat{e}_z \nabla^2 \phi \quad (\rho = \text{constante})$$

O lado direito da equação de movimento é

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) &= \nabla \times [j \hat{e}_z \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z)] = - \nabla \times [j (\hat{e}_z \cdot \nabla \psi) \hat{e}_z - j \nabla \psi] \\ &= -j (\hat{e}_z \cdot \nabla \psi) \nabla \times \hat{e}_z - \nabla [j (\hat{e}_z \cdot \nabla \psi)] \times \hat{e}_z + j \nabla \times \nabla \psi \\ &= - [(\hat{e}_z \cdot \nabla \psi) \nabla j] \times \hat{e}_z - [j (\hat{e}_z \cdot \nabla) \nabla \psi] \times \hat{e}_z + \nabla j \times \nabla \psi \end{aligned}$$

$$\hat{e}_z \cdot [\nabla \times (\vec{j} \times \vec{B})] = \hat{e}_z \cdot (\nabla j \times \nabla \psi) = - \hat{e}_z \cdot (\nabla \psi \times \nabla j)$$

Portanto, a equação para ϕ fica

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \phi = \hat{e}_z \cdot (\nabla \psi \times \nabla j)}$$

As equações básicas são portanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \psi = -\eta j + E_0 \quad ; \quad \nabla^2 \psi = -j_0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \phi = \hat{e}_z \cdot (\nabla \psi \times \nabla j)$$

Vamos escrever estas equações em variáveis adimensionais definindo as seguintes grandezas

$$v_A = \frac{B_{\perp 0}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \text{ m/s} \quad : \text{ velocidade de Alfvén poloidal}$$

$$B_{\perp 0} \text{ mag} \quad : \text{ valor típico do campo magnético poloidal}$$

$$\tau_r = \frac{\sigma^2 \mu_0}{\eta} \text{ s} \quad : \text{ tempo característico de difusão resistiva}$$

$$\tau_A = \frac{a}{v_A} \text{ ms} \quad : \text{ tempo característico de Alfvén}$$

$$\epsilon = \frac{\tau_A}{\tau_r} = \frac{\eta}{\sigma \mu_0 v_A} \quad : \text{ inverso do número de Reynolds magnético } (S = \epsilon^{-1})$$

Para determinar a normalização correta de ψ , notamos que

$$\vec{E}_{\perp} = \nabla \psi \times \hat{e}_z \quad B_{\perp 0} \vec{E}_{\perp n} = \frac{\psi_0}{a} \nabla_n \phi_n \times \hat{e}_z$$

onde o índice n indica a grandeza normalizada. Então a quantidade normalizada para ψ é

$$\boxed{\psi_0 = \sigma B_{\perp 0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{j_0 = \frac{B_{\perp 0}}{\sigma \mu_0}}$$

A velocidade é normalizada à velocidade de Alfvén, então

$$v_A v_n = \frac{\phi_0}{a} \nabla_n \phi_n \times \hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_0 = \sigma v_A}$$

O tempo de Alfvén τ_A é muito menor que o tempo de difusão resistiva, τ_r , de forma que $\epsilon \ll 1$. Normalizando o tempo com relação a τ_A e o campo elétrico de equilíbrio com relação ao campo

$$E_0 = B_{z0} v_A,$$

as equações normalizadas, retirando o índice n das grandezas normalizadas, ficam

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \nabla \psi = -\epsilon j + \epsilon; \quad \nabla^2 \psi = -j$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \psi = \hat{e}_z \cdot (\nabla \psi \times \nabla j),$$

onde o parâmetro pequeno ϵ fica agora evidenciado. Substituindo $\nabla^2 \psi = -j$, obtemos finalmente

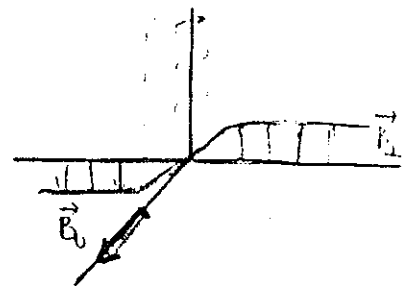
$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \nabla \psi &= \epsilon \nabla^2 \psi + \epsilon \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \psi &= -\hat{e}_z \cdot [\nabla \psi \times \nabla (\nabla^2 \psi)] \end{aligned}$$

Estas equações descrevem o equilíbrio, os modos lineares e a evolução não-linear dos modos que surgem na camada de corrente.

Equilíbrio

O campo perpendicular, $B_\perp$, é criado pela folha de corrente e, portanto, se anula em $x=0$. Como vamos considerar modos que se propagam só na direção y , vamos introduzir a grandeza

$$f(x) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{B}}{k_B} = B_\perp.$$



Lembrando que $B_\perp$ já está propriamente normalizado, temos

$$f(x) \approx x, \quad x \ll 1; \quad f(x) \rightarrow 1; \quad x \gg 1$$

Resumindo, o estado de equilíbrio é dado por

$$\vec{\nabla}_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0; \quad \psi_0 = \psi_0(x); \quad f(x) = -\frac{d\psi_0}{dx}; \quad \epsilon \nabla^2 \psi_0 = -E$$

Perturbação

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi_1(x, y) e^{\delta t}; \quad |\psi_1| \ll |\psi_0|$$

$$\phi(x, y) = \phi_1(x, y) e^{\delta t}$$

As equações linearizadas ficam

$$\begin{cases} \delta \psi_1 + \vec{\nabla}_1 \cdot \nabla \psi_0 = \epsilon \nabla^2 \psi_1 \\ \delta \nabla^2 \phi_1 = -\hat{z} \cdot [\nabla \psi_0 \times \nabla(\nabla^2 \psi_1) + \nabla \psi_1 \times \nabla(\nabla^2 \psi_0)] \end{cases}$$

$$\nabla \psi_0 = \frac{d\psi_0}{dx} \hat{e}_x = -f(x) \hat{e}_x$$

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \nabla \psi_0 = -f(x) v_{1x} = -f(x) \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Vamos decompor as grandezas perturbadas em componentes de Fourier na direção y .

$$\psi_1(x, y) = \psi_1(x) \omega(kay)$$

$$\phi_1(x, y) = \phi_1(x) \mu(kay);$$

O parâmetro a é introduzido no argumento porque y é normalizado a a ; ω é escolhido para ψ_1 e μ para ϕ_1 porque as equações mostram que ψ_1 e ϕ_1 têm paridades opostas. Temos então

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \nabla \psi_0 = ka f(x) \phi_1(x) \omega(kay)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = [\psi_1''(x) - k^2 a^2 \psi_1(x)] \omega(kay)$$

$$\nabla(\nabla^2 \psi_1) = [\psi_1'''(x) - k^2 a^2 \psi_1'(x)] \omega(k a y) \hat{e}_x - k a [\psi_1''(x) - k^2 a^2 \psi_1(x)] \rho \omega(k a y) \hat{e}_y$$

$$\nabla \phi_0 \times \nabla(\nabla^2 \psi_1) = f(x) k a [\psi_1''(x) - k^2 a^2 \psi_1(x)] \rho \omega(k a y) \hat{e}_z$$

$$\nabla^2 \psi_0 = -f'(x) ; \quad \nabla(\nabla^2 \psi_0) = -f''(x) \hat{e}_x$$

$$\nabla \psi_1 = \psi_1'(x) \omega(k a y) \hat{e}_x - k a \psi_1(x) \rho \omega(k a y) \hat{e}_y$$

$$\nabla \psi_1 \times \nabla(\nabla^2 \psi_0) = -k a f''(x) \psi_1(x) \rho \omega(k a y) \hat{e}_z$$

$$\nabla^2 \phi_1 = [\phi_1''(x) - k^2 a^2 \phi_1(x)] \rho \omega(k a y)$$

As equações ficam então

$$\begin{cases} \delta \psi_1'(x) - k a f(x) \phi_1(x) = \epsilon [\psi_1''(x) - k^2 a^2 \psi_1(x)] \\ \delta [\phi_1''(x) - k^2 a^2 \phi_1(x)] = -k a f(x) [\psi_1''(x) - k^2 a^2 \psi_1(x)] + k a f''(x) \psi_1(x) \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} \phi_1''(x) - k^2 a^2 \phi_1 &= -\frac{k a}{\delta} f(x) [\psi_1'' - k^2 a^2 \psi_1] + \frac{k a}{\delta} f''(x) \psi_1 \\ \psi_1 &= \frac{k a}{\delta} f(x) \phi_1(x) + \frac{\epsilon}{\delta} [\psi_1'' - k^2 a^2 \psi_1] \end{aligned}$$

Este sistema de equações tem que ser resolvido satisfazendo as condições de contorno apropriadas em $x \rightarrow \pm \infty$. Note-se que se o parâmetro $\epsilon \rightarrow 0$, resulta uma equação simples de segundo grau para $\phi_1(x)$; por outro lado, se ϵ for mantido, a equação resultante é de quarto grau. Isto indica claramente que ϵ introduz uma perturbação singular que leva a uma camada limite. Nós vamos supor que $\delta = \delta(\epsilon)$ de forma que $\delta \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Nós vamos resolver este problema de auto-valor usando a técnica da teoria de camada limite. Primeiro veremos que fazendo $\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, obtemos uma equação com um ponto singular em $x=0$, ou seja, quando $f(x)=0$. Vamos então considerar uma camada limite (resistiva) no entorno deste ponto e resolver a equação fora e dentro da camada, fazendo o casamento assintótico das soluções.

Região externa - MHD ideal

Na região externa consideramos $\epsilon \rightarrow 0$, obtendo

$$\psi_1'' - k^2 a^2 \psi_1 - \frac{f''}{f} \psi_1 = -\gamma [\phi_1'' - k^2 a^2 \phi_1]$$

$$\psi_1 = \frac{k a}{\gamma} f(x) \phi_1.$$

A segunda equação indica que $\phi_1 \sim \epsilon \psi_1$; portanto o termo do lado esquerdo da primeira equação é proporcional a $\epsilon^2 \psi_1$. Como esperamos que ϵ seja pequeno, da ordem de ϵ a alguma potência, podemos desprezar este termo obtendo

$$\psi_1'' - k^2 a^2 \psi_1 - \frac{f''}{f} \psi_1 = 0 \quad ; \quad \phi_1(x) = \frac{\gamma}{k a} \frac{\psi_1(x)}{f(x)}.$$

Na região ideal basta então resolver a equação para $\psi_1(x)$.

$$\boxed{\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - \left(k^2 a^2 + \frac{f''(x)}{f(x)} \right) \psi_1 = 0}$$

A solução desta equação depende da forma da função $f(x)$. No entanto é claro esta equação tem um polo em $x=0$, onde $f(x)=0$. Próximo do polo a equação fica

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \approx \frac{C}{x} \psi_1 \quad ; \quad C = \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \Big|_{x=0}$$

Para satisfazer esta equação quando $x \rightarrow 0$, temos

$$\psi_1(x) \approx c_1 + c_2 x \ln x \Rightarrow \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \approx \frac{c_2}{x} \approx \frac{C}{x} \cdot c_1 \quad \therefore c_2 = C \cdot c_1$$

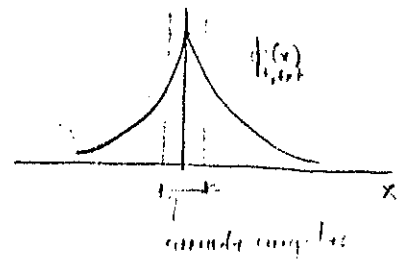
Desta forma, o comportamento assintótico da solução na região externa, quando $x \rightarrow 0$ é

$$\boxed{\psi_1(x) \approx c_1 + c_2 x \ln x}$$

Portanto $\psi_1(0) = \text{constante}$, mas $\frac{d\psi_1}{dx} \Big|_{x=0}$ e as derivadas superiores divergem, ou seja,

a derivada primeira da auto-função é descontínua em $x=0$, como indicado na figura. Definimos então o salto na derivada logarithmica de $\psi_{i,ext}$ como

$$\Delta' = \frac{\psi_i'(0^+) - \psi_i'(0^-)}{\psi_i(0)}$$



Este parâmetro tem um papel fundamental na estabilidade de ondas ionosféricas. Para calcular Δ' , é necessário resolver a equação para $\psi_i(x)$ fora da camada refletante, satisfazendo as condições de contorno. Por exemplo, um modelo que é muito usado para o campo produzido pela fiação de corrente é dado por

$$f(x) = \tanh(x)$$

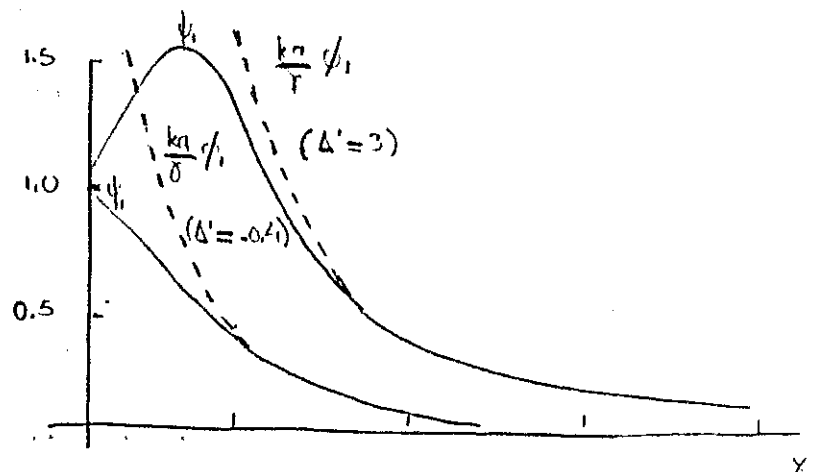
Nas vizinhanças não existe que a solução da equação para $\psi_i(x)$ é dada por

$$\psi_i(x) = e^{\pm k_a x} \left[1 \mp \frac{1}{k_a} \tanh x \right] ; \quad \begin{array}{l} + : x < 0 \\ - : x > 0 \end{array}$$

de modo que

$$\Delta' = 2 \left[\frac{1}{k_a} - k_0 \right]$$

Finalmente, é bom observar que embora $\psi_i(0)$ seja finito $\psi_i(0) = (1/k_a) f(0)$ diverge na região externa. Para o modelo $f(x) = \tanh(x)$, por exemplo, as soluções externas se comportam como mostrado na figura.



Região interna - camada resistiva

Na região interna mantemos o parâmetro pequeno ϵ . Como na discussão inicial sobre a técnica de camada limite, temos que definir uma variável interna apropriada dentro da camada resistiva. Além disso, temos uma complicação extra da relação ao simples exemplo matemático que vimos anteriormente porque não sabemos a priori como δ escala com ϵ e qual a relação entre as variáveis dependentes ψ , e ϕ , dentro da camada. Como sabemos que a solução externa tem um comportamento da forma $\psi \sim c_1 + c_2 x \ln x$ quando $x \rightarrow 0$, podemos solucionar este problema de uma forma sistemática fazendo

$$\delta = \epsilon^a \Lambda,$$

$$x = \epsilon^b \bar{x},$$

$$\psi_i = \psi_{i0} + \epsilon^b \psi_{i1}(\bar{x}), \quad \psi_{i0} = \text{const},$$

$$\phi_i = \frac{\delta}{k a} \epsilon^c \bar{\phi}_i$$

onde a, b e c são constantes a serem determinadas, $\bar{x}$ é a variável interna, e nós impomos que $\Lambda \sim \bar{x} \sim \bar{\phi}_i \sim \psi_{i1} \sim \mathcal{O}(1)$ dentro da camada. Suponhamos, além disso, que $f(x)$ varia linearmente dentro da camada resistiva, isto é,

$$f(x) \approx x = \epsilon^b \bar{x} ; f''(x) \ll 1.$$

Substituindo as expressões acima nas equações para ψ e ϕ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\phi}_i}{d\bar{x}^2} - k^2 a^2 \epsilon^{2b} \bar{\phi}_i = - \frac{k^2 a^2}{\Lambda^2} \epsilon^{2b-2a-c} \bar{x} \left[\frac{d^2 \psi_{i1}}{d\bar{x}^2} - k^2 a^2 \epsilon^b (\psi_{i0} + \epsilon^b \psi_{i1}) \right] \\ \psi_{i0} + \epsilon^b \psi_{i1} = \epsilon^{b+c} \bar{x} \bar{\phi}_i + \frac{\epsilon^{1-a-b}}{\Lambda} \left[\frac{d^2 \psi_{i1}}{d\bar{x}^2} - k^2 a^2 \epsilon^b (\psi_{i0} + \epsilon^b \psi_{i1}) \right] \end{cases}$$

As constantes a, b e c são determinadas de forma que os termos devidos explicitamente à manutenção do parâmetro ϵ sejam $\mathcal{O}(1)$; naturalmente dentro da camada os termos mais importantes são os de derivadas mais altas.

As constantes a, b e c devem então satisfazer as equações

$$2b - 2a - c = 0$$

$$b + c = 0$$

$$1 - a - b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{5} ; b = -c = \frac{2}{5}}$$

Substituindo estas constantes nas duas equações e desprezando os termos de ordem superior em ϵ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\phi}_1}{d\bar{x}^2} = - \frac{k^2 a^2}{\Lambda^2} \bar{x} \frac{d^2 \psi_{11}}{d\bar{x}^2} \\ \psi_{10} = \bar{x} \bar{\phi}_1 + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_{11}}{d\bar{x}^2} \end{cases}$$

Considerando que $\psi_{10} = \text{const.}$, estas duas equações podem ser facilmente combinadas numa única equação para ϕ_1 :

$$\frac{d^2 \phi_1}{d\bar{x}^2} = - \frac{k^2 a^2}{\Lambda^2} \bar{x} \Lambda (\psi_{10} - \bar{x} \bar{\phi}_1)$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2 \bar{\phi}_1}{d\bar{x}^2} - \frac{k^2 a^2}{\Lambda} \bar{x}^2 \bar{\phi}_1 = - \frac{k^2 a^2}{\Lambda} \psi_{10} \bar{x}}$$

A solução desta equação tem que ser casada assintoticamente com a solução externa, ou seja,

$$\Delta'_{\text{interno}} = \Delta'_{\text{externo}}$$

onde

$$\Delta' = \frac{\psi'_1(0^+) - \psi'_1(0^-)}{\psi_{10}} ; \quad \psi'_1 = \frac{d\psi_1}{d\bar{x}}$$

Dentro da camada temos $\frac{d\psi_1}{d\bar{x}} = \frac{\epsilon^{\gamma}}{\epsilon^{\beta}} \frac{d\psi_{11}}{d\bar{x}} = \frac{d\psi_{11}}{d\bar{x}}$; então da primeira equação acima obtemos

$$\left. \frac{d\psi_1}{d\bar{x}} \right|_+ - \left. \frac{d\psi_1}{d\bar{x}} \right|_- = - \frac{\Lambda^2}{k^2 a^2} \int_-^+ \frac{d^2 \bar{\phi}_1 / d\bar{x}^2}{\bar{x}} d\bar{x}$$

Como $\psi_1(0) = \psi_{10} = \text{const}$, temos

$$\Delta'_{\text{int}} = \frac{\left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_+ - \left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_-}{\psi_{10}} = - \frac{\Lambda^2}{k^2 a^2 \psi_{10}} \int_{-}^{+} \frac{d^2 \tilde{\phi}_1 / d\bar{x}^2}{\bar{x}} d\bar{x}$$

Δ'_{ext} , por outro lado, é conhecido da solução externa; então a equação de auto-valor para Λ é

$$\Delta'_{\text{int}} = \Delta'_{\text{ext}} \Rightarrow - \frac{\Lambda^2}{k^2 a^2 \psi_{10}} \int_{-}^{+} \frac{d^2 \tilde{\phi}_1 / d\bar{x}^2}{\bar{x}} d\bar{x} = \Delta'_{\text{ext}}$$

Naturalmente para determinar Λ^2 temos então que resolver a equação para $\tilde{\phi}_1$. Afin de simplificar a solução, vamos tentar definir novas variáveis para eliminar as constantes $k^2 a^2$, Λ^2 e ψ_{10} :

$$\chi = A \tilde{\phi}_1 \quad \text{e} \quad z = B \bar{x},$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Substituindo na equação para $\tilde{\phi}_1$, obtemos

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} - \frac{k^2 a^2}{\Lambda B^2} z^2 \chi = - \frac{k^2 a^2}{\Lambda} \frac{A \psi_{10}}{B^2} z.$$

Escolhendo $A = - \frac{(\Lambda / k^2 a^2)^{1/4}}{\psi_{10}}$ e $B = \left(\frac{k^2 a^2}{\Lambda} \right)^{1/4}$, obtemos finalmente

$$\boxed{\frac{d^2 \chi}{dz^2} - z^2 \chi = z}$$

Em termos dessas novas variáveis, a relação de dispersão fica

$$\frac{\Lambda^2}{k^2 a^2 \psi_{10}} \frac{\psi_{10}}{(\Lambda / k^2 a^2)^{1/4}} \left(\frac{k^2 a^2}{\Lambda} \right)^{1/2} \int_{-}^{+} \frac{d^2 \chi / dz^2}{z} dz = \Delta'_{\text{ext}}$$

$$\therefore \Lambda^{5/4} (k^2 a^2)^{-1/4} \int_{-}^{+} \frac{dz}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2} = \Delta'_{\text{ext}}$$

A solução da equação para $\chi(z)$ pode ser obtida através de uma representação integral e será vista numa série de exercícios. A solução é

$$\chi(z) = -z \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} e^{-z^2 t} dt$$

tal que

$$\chi(z) \approx -0.599 + \frac{1}{6} z^3 - 0.0599 z^5 + \dots, \quad z \ll 1$$

$$\chi(z) \approx -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^5} + \dots; \quad z \gg 1$$

Como a função $\frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2} \sim \frac{1}{z^3}$ quando $z \rightarrow \infty$, podemos fazer

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2}$$

Usando a representação integral acima, temos

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} = \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} (6zt - 4z^3 t^2) e^{-z^2 t} dt;$$

portanto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} (6zt - 4z^3 t^2) e^{-z^2 t} dt$$

Fazendo primeiro a integral em z , temos

$$I = 4\sqrt{\pi} \int_0^{1/2} dt t^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4}$$

Este integral é relacionado com a função $B(x, y)$ definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau; \quad \text{Re } x > 0; \quad \text{Re } y > 0.$$

Dois importantes relações envolvendo a função $B(x, y)$ são

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad B(x, x) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

A solução da equação para $\chi(z)$ pode ser obtida através de uma representação integral e será vista numa série de exercícios. A solução é

$$\chi(z) = -z \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} e^{-z^2 t} dt$$

tal que

$$\chi(z) \approx -0.599 + \frac{1}{6} z^3 - 0.0599 z^5 + \dots, \quad z \ll 1$$

$$\chi(z) \approx -\frac{1}{z} - \frac{7}{z^5} + \dots; \quad z \gg 1$$

Como a função $\frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2} \sim \frac{1}{z^3}$ quando $z \rightarrow \infty$, podemos fazer

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z} \frac{d^2 \chi}{dz^2}.$$

Usando a representação integral acima, temos

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} = \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} (6zt - 4t^3 t^2) e^{-z^2 t} dt;$$

portanto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4} (6zt - 4t^3 t^2) e^{-z^2 t} dt$$

Fazendo primeiro o integral em z , temos

$$I = 4\sqrt{\pi} \int_0^{1/2} dt t^{1/2} (1-4t^2)^{-1/4}$$

Esta integral é relacionada com a função $B(x, y)$ definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau; \quad \text{Re } x > 0; \quad \text{Re } y > 0.$$

Dois importantes relações envolvendo a função $B(x, y)$ são

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad B(x, x) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

Para transformar a integral na função $B(x, y)$, basta fazer

$$\tau = 4t^2 \quad \therefore d\tau = 8t dt \quad ; \quad t = \frac{\tau^{1/2}}{2}$$

$$\therefore I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 d\tau \tau^{-1/4} (1-\tau)^{-1/4} \Rightarrow x=y=\frac{3}{4}$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} 2^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = 2\pi \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

Nota: White (em Handbook of Plasma Physics, Eds. Galeev & Sudan, Vol I., p.624) não obtém o fator 2 neste resultado; aparentemente ele usou no cálculo da primeira integral — verificar!.

Substituindo este resultado na equação de auto-valores, obtém-se

$$\Lambda^{5/4} (k^2 a^2)^{-1/4} \cdot 2\pi \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = \Delta'_{ext}$$

Escrevendo novamente em termos das grandezas físicas originais, temos

$$\gamma = \left[\frac{\Gamma(1/4)}{2\pi \Gamma(3/4)} a \Delta'_{ext} \right]^{4/5} \tau_A^{-1} \epsilon^{3/5} (V_A^2)^{1/5} = \left[\frac{\Gamma(1/4)}{2\pi \Gamma(3/4)} a \Delta'_{ext} \right]^{4/5} \tau_A^{-2/5} \left(\frac{v_A}{v_A} \right)^{1/5}$$

: - verificar

Desta expressão vemos que o modo é instável se Δ'_{ext} (agora calculado em termos da variável x não normalizada com respeito a a) for positivo.

Para que o modo de ruptura seja instável (γ real > 0) é portanto necessário que $\Delta'_{ext} > 0$; desta forma, uma condição suficiente para a estabilidade dos modos de ruptura (tearing) é

$$\Delta'_{ext} < 0$$

Este resultado mostra que para se determinar a estabilidade dos modos de ruptura em configurações mais, não é necessário resolver as equações

resistivas. Basta resolver as equações MHD ideais e determinar Δ' nos pontos singulares. Se $\Delta' > 0$, o nodo será instável e a razão de crescimento pode ser calculada pela expressão acima.

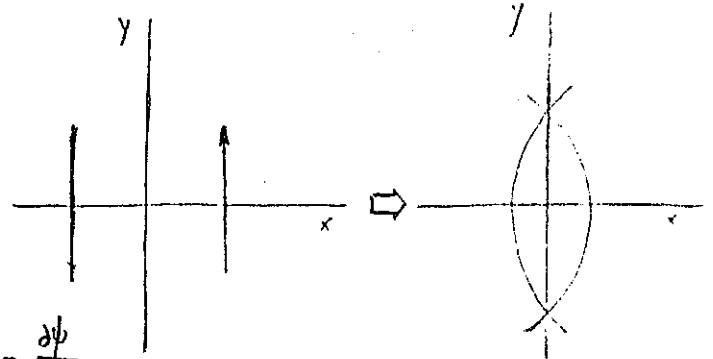
Ilhas Magnéticas

A consequência dos nodos de ruptura é romper as linhas de força ^{originais} da componente perpendicular do campo magnético, $\vec{B}_\perp$, e reconectá-las formando ilhas magnéticas. Inicialmente, lembramos que as linhas de força de $\vec{B}_\perp$ são dadas por $\psi(x, y) = \text{const.}$:

$$\frac{dx}{B_{\perp x}} = \frac{dy}{B_{\perp y}}$$

$$\vec{B}_\perp = \nabla \psi \times \hat{e}_z \Rightarrow B_{\perp x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; B_{\perp y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow d\psi = 0$$



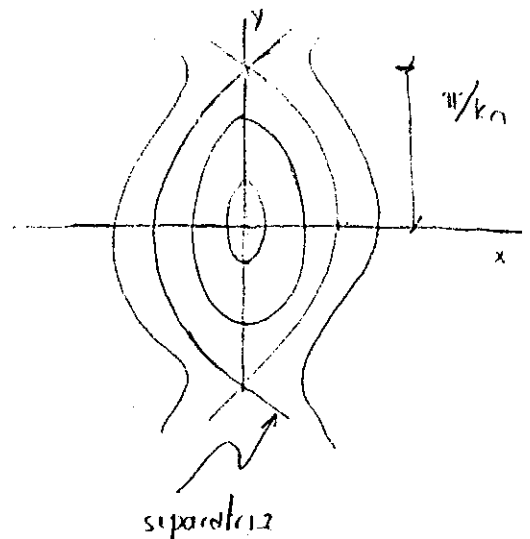
A função de fluxo magnético, incluindo a perturbação associada ao modo de ruptura, é dada por

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi_1(x) \cos k_0 y$$

As superfícies

$$\psi_0(x) + \psi_1(x) \cos k_0 y$$

têm a forma mostrada na figura, ou seja, a forma de ilhas. Para verificar que a forma é realmente esta, vamos considerar as ilhas próximas de $x=0$:



$$\psi'_0(x) = f(x) = x \quad \therefore \quad \psi_0(x) = \frac{x^2}{2}$$

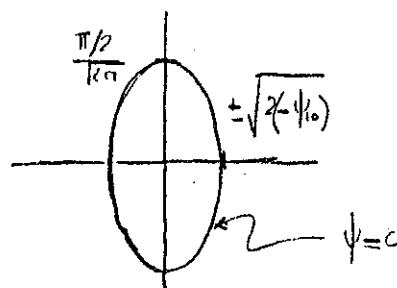
$$\psi_1(x) \approx \psi_{10} = \text{const.}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} + \psi_{10} \omega k a y = \text{const.}$$

Para facilitar os cálculos, vamos considerar $\text{const} = 0$. Portanto a curva passa nas pontas

$$x = \pm \sqrt{2(-\psi_{10})} ; y = 0$$

$$x = 0 ; y = \frac{\pi/2}{ka}$$



Os pontos de estagnação são dados por

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{10}}{\partial x} \omega k a y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\psi_{10} k a \omega k a y = 0 \Rightarrow y = \frac{n\pi}{ka} ; n = 0, 1, 2, \dots$$

Os pontos de estagnação são elípticos ou hiperbólicos dependendo do sinal de

$$\Delta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-\psi_{10}) k^2 a^2 \omega k a y$$

elíptico: $\Delta > 0 \Rightarrow y = 0, \frac{2\pi}{ka}, \dots$ para $(-\psi_{10}) > 0$

hiperbólico: $\Delta < 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{ka}, \dots$ para $(-\psi_{10}) > 0$.

Comprimento da ilha:

Para encontrar o comprimento da ilha, basta determinar o valor de ψ na separatrix:

$$\psi(0, \frac{\pi}{ka}) = \psi_0(0) - \psi_1(0)$$

Quando a separatrix corta $y=0$, temos

$$\psi_0(x) + \psi_1(x) = \text{const} = \psi_0(0) - \psi_1(0)$$

$$\underbrace{\psi_0(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{d\psi_0}{dx}\bigg|_0}_{=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2\psi_0}{dx^2}\bigg|_0 x^2 + \dots + \underbrace{\psi_1(x)}_{\approx \text{const} = \psi_1(0)} = \psi_0 - \psi_1(0)$$

$$\therefore x^2 \approx \frac{4(-\psi_1(0))}{\psi_0''} \quad \therefore x = \pm 2 \sqrt{\frac{-\psi_1(0)}{\psi_0''}}$$

A largura da ilha é dada por $w = 2|x|$, ou seja,

$$w = 4 \left[\frac{-\psi_1(0)}{\psi_0''} \right]^{1/2}$$

~ ~ ~

Modos de Ruptura em Geometria Cilíndrica

A análise do modo de ruptura que fizemos para o falo de corrente, em geometria cartesiana, pode ser facilmente estendida para analisar os modos de ruptura em geometria cilíndrica. Nós já vimos que em geometria cilíndrica a equação de auto-valores para os modos marginalmente estáveis ($b \rightarrow 0$), ou seja, a equação de Newcomb, tem pontos singulares quando $F(r) = B_\theta [m - nq(r)]/r = 0$. No estudo do modo de ruptura nós outra vez usamos a teoria de camada limite considerando uma camada resistiva no interior destes pontos. Fora da camada resolvemos a equação de Newcomb e fazemos o casamento assintótico com a solução dentro da camada.

A equação de Newcomb é dada por

$$\frac{d}{dr} \frac{r^3 F^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\xi}{dr} - g(r) \xi = 0,$$

onde

$$g(r) = \frac{m^2 - 1}{m^2 + k^2 r^2} r F^2 + \frac{k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[2\mu_0 \frac{dp}{dr} + r F^2 - 2r F \frac{\frac{m}{r} E_\theta - k E_z}{m^2 + k^2 r^2} \right]$$

Esta equação pode ser escrita para a variável ψ , o fluxo magnético, que utilizamos na análise do modo de ruptura:

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \hat{e}_z + B_0 \hat{e}_z$$

A componente perpendicular do campo magnético perturbado é dada por

$$\vec{B}_{\perp 1} = \nabla \psi_1 \times \hat{e}_z = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \hat{e}_\theta + i \frac{m}{r} \psi_1 \hat{e}_r$$

Na análise MHD ideal, nós representamos o campo magnético perturbado no plano por $\vec{Q}$; sua relação com $\vec{\xi}$ é

$$\vec{Q} = iF \vec{\xi} - \left(r \frac{d}{dr} \frac{B_0}{r} \right) \xi_r \hat{e}_\theta - \left(\frac{dB_0}{dr} \right) \xi_r \hat{e}_z$$

Portanto, temos

$$Q_r = B_{r1} \Rightarrow iF \xi = i \frac{m}{r} \psi_1 \quad : \quad \boxed{\psi_1 = \frac{1}{m} r F \xi} \quad (\xi \equiv \xi_r)$$

Portanto a equação para ξ pode ser transformada numa equação para ψ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{r^2 F^2}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\xi}{dr} &= \frac{d}{dr} \frac{r^2 F}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (r F \xi) - \frac{d}{dr} \frac{r^2 F}{m^2 + k^2 r^2} \xi \frac{d}{dr} (r F) \\ &= m \frac{d}{dr} \frac{r^2 F}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\psi_1}{dr} - m \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \psi_1 \frac{d}{dr} (r F) \\ &= m r F \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\psi_1}{dr} + m \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \left(\frac{d\psi_1}{dr} \right) \left(\frac{d}{dr} (r F) \right) - m \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \left(\frac{d\psi_1}{dr} \right) \left(\frac{d}{dr} (r F) \right) \\ &\quad - m \psi_1 \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (r F) \\ &= m (r F) \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\psi_1}{dr} - m \psi_1 \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (r F) \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação original, temos a equação para ψ_1 :

$$\boxed{\frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d\psi_1}{dr} - \left[\frac{g}{(rF)^2} + \frac{1}{rF} \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (rF) \right] \psi_1 = 0}$$

Esta equação é naturalmente singular nos pontos em que $F=0$; para modos tais que $k^2 r^2 \ll m^2$ a singularidade é devida ao segundo termo no colchete ao invés do primeiro. Na aplicações práticas para tokamaks, a aproximação $k^2 r^2 \ll m^2$ é geralmente feita porque $k = -n/R$ e $r^2/R^2 \ll m^2/n^2$ para os modos de interesse, ou seja, $m \geq 2$, $n \approx O(1)$. Neste caso, temos

$$g \approx \frac{m^2 - 1}{m^2} r F^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{r}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} (r F) &\approx \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (m B_\theta + k r B_z) \\ &= \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr} r (m B_\theta + k r B_z) - \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} (m B_\theta + k r B_z) \\ &= \frac{r}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r (m B_\theta + k r B_z) + \frac{1}{m^2 r} \frac{d}{dr} r (m B_\theta + k r B_z) \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} (m B_\theta + k r B_z) \\ &= \frac{r}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r (m B_\theta + k r B_z) + \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} (m B_\theta + k r B_z) + \frac{1}{m^2} \frac{m B_\theta + k r B_z}{r} \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \frac{d}{dr} (m B_\theta + k r B_z) \\ &= \frac{r}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 F + \frac{F}{m^2} \end{aligned}$$

Então, nesta aproximação ($k^2 r^2 \ll m^2$), a equação fica

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \psi = \left[\frac{1}{r F} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 F \right]$$

Mas

$$r^2 F = m r B_\theta + k r^2 B_z$$

$$\therefore \frac{d}{dr} (r^2 F) = m \frac{d}{dr} (r B_\theta) + 2 k r B_z \quad (B_z \approx \text{const})$$

$$\therefore \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 F \approx m \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \underbrace{\frac{d}{dr} (r B_\theta)}_{\mu_0 j_z} = m \frac{dj_z}{dr},$$

onde j_z é a densidade de corrente na direção z . Então obtemos finalmente

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \psi - \frac{m\mu_0 \frac{dj_0}{dr}}{B_0(m-nq)} \psi = 0$$

Esta é a equação que geralmente se utiliza no estudo da estabilidade de modos de ressonância em tokamaks. Notem que a equação tem pontos singulares em

$$q(r_s) = \frac{m}{n}$$

Como no caso da camada de corrente, igualamos a discontinuidade logarítmica de ψ nos pontos singulares com a mesma discontinuidade da solução interna. Notem que, no caso cilíndrico

$$\Delta' = \frac{1}{\psi_i(r_s)} \left[\frac{d\psi_i}{dr} \Big|_{r_s^+} - \frac{d\psi_i}{dr} \Big|_{r_s^-} \right] = - \frac{1}{\psi_i(r_s)} \left[Q_\theta(r_s^+) - Q_\theta(r_s^-) \right],$$

onde Q_θ é a componente θ do campo magnético perturbado. Mas, pela lei de Ampère, temos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r Q_\theta) = \mu_0 j_{\parallel z} \Rightarrow Q_\theta(r_s^+) - Q_\theta(r_s^-) = \mu_0 \int_{r_s^-}^{r_s^+} j_{\parallel z} dr \approx \mu_0 j_{\parallel z} \delta r,$$

onde $j_{\parallel z}$ é a corrente perturbada que aparece na camada resistiva e δr é a largura da camada. Portanto o modo de ressonância é gerado por uma perturbação na corrente de equilíbrio que surge na camada.

Como a camada resistiva é muito estreita, efeitos cilíndricos não são importantes na camada e as equações dentro da camada são as mesmas que já derivamos em coordenadas cartesianas, fazendo $x = (r - r_s)/r_s$. A razão de crescimento é dada por

$$\gamma = \left[\frac{\Gamma(1/4)}{2\pi\Gamma(3/4)} r_s \Delta' \right]^{4/5} \tau_r^{-3/5} \tau_\lambda^{-2/5}$$

e portanto $\Delta' > 0$ significa instabilidade.

O cálculo de Δ' tem que ser feito numericamente para a razão

parte dos casos de interesse. A equação para ψ é integrada a partir de $r=0$ e de $r=a$ até o ponto de singularidade e o valor de Δ' é determinado. Um método de solução é descrito por Furth, Rutherford e Selberg (Phys. Fluids 16 (1973) 234). Eles resolveram numericamente a equação para ψ usando o seguinte perfil de corrente

$$j = \frac{j(0)}{[1 + (\frac{r}{r_0})^{2p}]^{1+\frac{1}{p}}} \Rightarrow q(r) = q(0) \left[1 + (\frac{r}{r_0})^{2p} \right]^{\frac{1}{p}},$$

onde dá uma medida da largura do canal de corrente e p é uma constante. Quanto maior for o valor de p , mais largo é o perfil de corrente. Furth, Rutherford and Selberg fizeram os cálculos para $p=1, 2$ e 4 que correspondem a perfis denominados "picado", "arredondado" e "plano", respectivamente. O resultado geral é que quanto mais "picado", ou seja, mais estruturado, for o perfil de densidade de corrente, mais estável é o plasma aos modos de ruptura. No entanto, os modos $m=2$ e $m=3$ permanecem geralmente instáveis.

Embora os modos de ruptura $m=2$ e $m=3$ tenham a tendência de surgir sem instáveis, eles geralmente não destroem a configuração de equilíbrio. Mais tarde viu-se que a evolução não linear dos modos de ruptura leva à formação de ilhas magnéticas de largura finita. A largura das ilhas depende da quantidade de energia livre no plasma para alimentar o modo (veja R. White, Rev. of Modern Phys. 58 (1986) p.189). Se as ilhas forem suficientemente estreitas, as ilhas devidas aos modos $m=2$ e $m=3$ não se tocam e permanecem no plasma numa forma saturada. No entanto, se as ilhas forem muito largas, elas podem se tocar criando uma grande região de campos estocásticos no centro do plasma. Isto é um dos mecanismos propostos para explicar a instabilidade disruptiva em tokamaks (B. Waddell, G. L. Hans, J. D. Callen, and H. R. Hicks, Nuclear Fusion 18 (1978) 735).

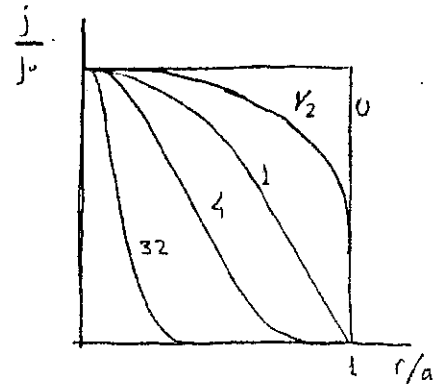
Diagrama de Wesson

A estabilidade de modos ideais ou resistivos depende fundamentalmente dos perfis de equilíbrio. Para os modos kink e tearing (teoria) e para plasmas de baixo valor de β , o perfil da densidade de corrente tem um papel mais importante do que o perfil da pressão nas condições de estabilidade. Afin de dar uma visão geral das condições de estabilidade, sem levar em consideração detalhes menos relevantes das configurações de equilíbrio, Wesson estudou a estabilidade, quanto a modos ideais e resistivos, de perfis de corrente da forma

$$j = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\nu,$$

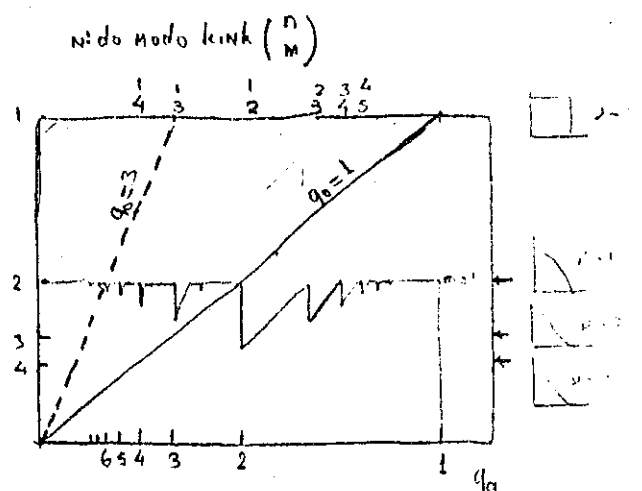
onde ν é uma constante e j_0 é relacionado à corrente total do plasma através da expressão

$$j_0 = (\nu + 1) \frac{I}{\pi a^2}$$



A solução da equação de alto-valor foi determinada numericamente. Os resultados são apresentados num diagrama q_a/q_0 versus q_0 que é muito conveniente do ponto de vista experimental já que q_0 pode ser diretamente medido e $q_a/q_0 = \nu + 1$ pode ser inferido da indutância interna da coluna de plasma. Este diagrama é reproduzido na figura.

- Toda a região tracejada é instável ao modo kink externo. Note, portanto, que se o perfil de corrente for suficientemente estreito, $\nu \geq 2$, e $q_0 \geq 2$, a coluna de plasma é estável aos modos kink externos. Este limite inferior para q_0 é considerado instancionável para os experimentais.



(John A. Wesson, Nuc. Fusion 17, 87 (1976))

- Toda a região abaixo da linha $q_0=1$ é instável ao modo kink interno e toda a região abaixo da linha $q_0=3$ é instável aos modos tearing $m=2$ e $m=3$. Se exigirmos que o plasma seja estável a todos estes modos, sobra uma pequena região de estabilidade para $q_0 > 6$ e $q_0/q_0 > 2$. Estes limites tornariam o tokamak praticamente inviável para valores à fusão.

Na prática, não existe ainda um método confiável de controlar (ou até mesmo medir) o valor de q_0 . Desta forma, nos tokamaks os modos tearing $m=2$ e $m=3$ existem na forma de ilhas magnéticas saturadas. O valor de q_0 , no entanto, oscila no intorno de $q_0 \approx 1$ devido a existência do modo kink interno resistivo (que infelizmente não temo tempo de vida) que leva a uma relaxação periódica da temperatura no centro da coluna de plasma. Esta oscilação é denominada "oscilação-dinh-de-seco" devido à forma característica do trace de emissão de raios-X nos que acompanham as oscilações de temperatura (veja o livro do Balmain, MHD Instabilities, cap. II).

Evolução Quasi-Linear do Modo de Ruptura

ou

"Poor's man Rutherford Theory"

Nós vimos que a largura do ilha magnética associada com o modo de ruptura (tearing) é dado por

$$w = 4 \left[\frac{-\psi_{10}}{\psi_0^n} \right]^{1/2}.$$

No regime linear, a amplitude do campo perturbado, que é proporcional a ψ_{10} , é arbitrária. Mas, como ψ_0 cresce exponencialmente com o tempo, após um tempo bastante pequeno a largura do ilha fica da ordem da espessura da camada resistiva. Rutherford (P.H. Rutherford, *Phys. of Fluids* 16 (1973) 1903; veja também R.E. White, *Rev. of Modern Phys.* 58 (1986) 183) demonstrou que após atingir esta amplitude, o ilha passa a crescer linearmente no tempo até atingir saturação quando $\Delta'(w)$, onde $\Delta'(w)$ é calculado nas bordas do ilha se anula. Neste regime quasi-linear, os efeitos de inércia do fluido são desprezíveis e o crescimento do ilha é governado apenas pela corrente não-linear dentro do ilha.

Vamos apresentar uma derivação bem simples do regime quasi-linear de Rutherford. Nós vimos que a equação para o fluxo magnético, tanto de equilíbrio como o não perturbado é

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \psi = \epsilon \nabla^2 \psi + E.$$

Para derivar a teoria quasi-linear, nós representamos qualquer grandeza na forma

$$A = \langle A \rangle + \tilde{A}$$

onde $\langle A \rangle$ é uma média de ensemble e $\tilde{A}$ é a perturbação, não necessariamente pequena, no intorno da média. Nos restringindo ao modelo de flocos em geometria cartesiana e a modos que se propagam só na direção y , podemos escrever

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_{n \neq 0} A_n(x, t) e^{inky} + \text{complexo conjugado},$$

e definir

$$\langle \rangle = \frac{k_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_0} () dy.$$

Claramente

$$\langle A \rangle = 0$$

$$\langle A \tilde{B} \rangle = \frac{k_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_0} \left[\sum_k A_k e^{ink_0 y} + \sum_k A_k^* e^{-ink_0 y} \right] \left[\sum_k B_k e^{ink_0 y} + \sum_k B_k^* e^{-ink_0 y} \right] dy$$

$$\langle A \tilde{B} \rangle = \sum_{n=0} A_n(x,t) B_n^*(x,t) + \text{complexo conjugado}.$$

Substituindo $\psi = \langle \psi \rangle + \tilde{\psi}$ na equação para ψ , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \psi \rangle + \tilde{\psi}) + [(\langle \vec{v} \rangle + \vec{\tilde{v}}) \cdot \nabla] (\langle \psi \rangle + \tilde{\psi}) = \epsilon \nabla^2 (\langle \psi \rangle + \tilde{\psi}) - E.$$

Tomando a média desta equação, temos

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + \langle \vec{\tilde{v}} \cdot \nabla \tilde{\psi} \rangle = \epsilon \nabla^2 \langle \psi \rangle - E,$$

onde consideramos $\langle \vec{v} \rangle = 0$. Substituindo esta equação do anterior, temos

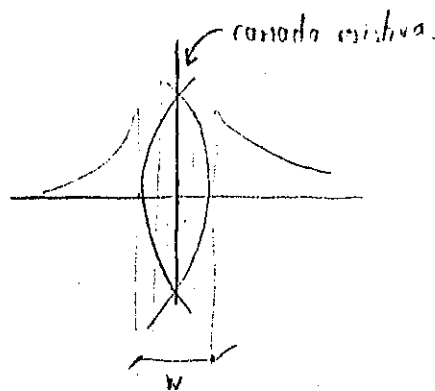
$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \vec{\tilde{v}} \cdot \langle \psi \rangle - \epsilon \nabla^2 \tilde{\psi} = [\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla \tilde{\psi} - \langle \vec{\tilde{v}} \cdot \nabla \tilde{\psi} \rangle]$$

O termo no lado direito desta equação representa o valor da correlação $\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla \tilde{\psi}$ menos sua média de ensemble. Isto assegura que o lado direito da equação não é uma função de x somente, ou seja, este termo tem uma estrutura oscilante em y . Por exemplo, se houverem duas flutuações em n_1 e n_2 ($n_1, k_1 y$ e $n_2, k_2 y$), os termos quadráticos darão origem a termos em $2n_1, 2n_2$ e $n_1 \pm n_2$. No infinito, nenhuma flutuação será induzida com $n=0$ porque a média de ensemble é subtraída. Este termo descreve portanto o acoplamento entre modos, mas não o acoplamento destes com o fluxo médio $\langle \psi \rangle$.

Na teoria quasi-linear, desprezamos o acoplamento entre modos mas não o efeito médio deste acoplamento na evolução do grandeza média. Assim as equações quasi-lineares ficam:

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + \langle \vec{\nabla} \cdot \nabla \tilde{\psi} \rangle = \epsilon \nabla^2 \langle \psi \rangle - \epsilon$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \nabla \langle \psi \rangle = \epsilon \nabla^2 \tilde{\psi}.$$



Esta última equação permite derivar a evolução quasilinear para a largura do ilha. Suponhamos que a variação de $\langle \psi \rangle$ através do ilha é muito mais suave que a de $\tilde{\psi}$. Então, desprezando o termo $\vec{\nabla} \cdot \nabla \langle \psi \rangle$, temos

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \approx \epsilon \nabla^2 \tilde{\psi}$$

Mas

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^2} \approx \frac{\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ - \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_-}{w} \approx \frac{\Delta'(w) \psi}{w}$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \approx \epsilon \frac{\Delta' \psi}{w}$$

Mas, para uma ilha, vimos que $w \sim \sqrt{\psi}$; então

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial w} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot 2w$$

$$2w \frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{\Delta' w^2 \epsilon}{w} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \Delta'(w) \epsilon}$$

Um cálculo mais correto, fornece $dw/dt \approx (\pi/2) \Delta'(w) \epsilon$ (White).

Esta equação mostra que no regime quasi-linear a ilha cresce no escala de tempo resistiva τ_r . Ela naturalmente atinge saturação quando $\Delta'(w) = 0$. Portanto, conhecido o perfil de corrente $j_0(r)$, podemos em princípio determinar a largura das ilhas saturadas. Para isto basta resolver a equação para $\tilde{\psi}$ (ou ψ_i) que vimos antes:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \tilde{\psi} - \frac{m \mu_0 \frac{dj_0}{dr}}{B_0(m-nq)} \tilde{\psi} = 0,$$

e calcular $\Delta'(w)$ para diferentes distâncias $\pm w/2$ no intorno do ponto singular. Para um dado m , a largura da ilha é dada por $\Delta(w) = 0$.

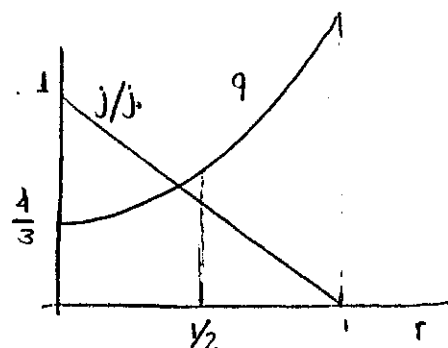
Exemplo.

Vamos considerar o modo $m=2$ para o modelo simples de corrente mostrado na figura:

$$j = j_0(1-r) ; r \leq 1$$

(r é normalizado a a). Vamos escolher j_0 de modo que

$$q = \frac{4/3}{1 - \frac{2}{3}r}$$



O ponto $q=2$ ocorre portanto em $r=1/2$. Considerando $m=2$ e determinando B_0 em termos de $j(r)$, a equação para $\tilde{\Psi}$ fica:

$$\frac{d}{dr} r \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{r-2}{r(r-\frac{1}{2})} \tilde{\Psi} = 0.$$

Esta equação tem que ser solucionada com as condições de contorno

$$\tilde{\Psi} \rightarrow r^2 ; r \rightarrow 0 ; \tilde{\Psi}(1) = 0 ; \tilde{\Psi}(r_s) \text{ finito.}$$

É fácil de verificar que uma solução para $\tilde{\Psi}$ é

$$\tilde{\Psi}_1 = \frac{1-2r}{r^2}$$

(Note que esta solução diverge quando $r \rightarrow 0$; portanto ela tem que ser combinada com a outra solução para dar a condição de contorno correta). Para encontrar a segunda solução para $\tilde{\Psi}$, vamos usar uma técnica geral descrita em Morse & Feshbach, Vol. I, p. 525. Para uma equação da forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

temos

$$y_2 = y_1 \int e^{-\int p dx} \frac{dx}{y_1^2},$$

onde y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial. Escrevendo a equação para ψ na forma acima e usando $\psi_1 = (1-2r)/r^2$, temos

$$\tilde{\psi}_2(r) = \tilde{\psi}_1(r) \int \frac{r^3}{(1-2r)^2} dr$$

ou

$$\tilde{\psi}_2(r) = \frac{1-2r}{r^2} \left[\frac{1}{1-2r} + 3 \ln(1-2r) - 3(1-2r) + \frac{(1-2r)^2}{2} \right]$$

A solução geral ($r \leq r_s$) é então dada por

$$\tilde{\psi} = A \tilde{\psi}_1 + B \tilde{\psi}_2.$$

Quando $r \rightarrow 0$, temos

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1-2r}{r^2},$$

$$\tilde{\psi}_2 \approx \frac{1-2r}{r^2} \left(-\frac{3}{2} + 4r^4 \right)$$

$$\tilde{\psi} \approx \left(A - \frac{3}{2} B \right) \frac{1-2r}{r^2} + 4r^2(1-2r)$$

Portanto, para que $\tilde{\psi} \sim r^2$, temos $A = \frac{3}{2} B$, ou seja,

$$\tilde{\psi}_{(r)} = A \cdot \frac{1-2r}{r^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1-2r} + 3 \ln(1-2r) - 3(1-2r) + \frac{(1-2r)^2}{2} \right] \right\}$$

$$r \leq r_s = \frac{1}{2}$$

Para $r > r_s$ não podemos usar esta solução porque $\ln(1-2r)$ se torna imaginário para $r_s > 1/2$. Para encontrar a solução para $r > r_s$, basta

faça

$$\tilde{\Psi}_1 = \frac{2r-1}{r^2}$$

Seguindo o mesmo procedimento e impondo $\tilde{\Psi}(1)=0$, obtemos

$$\tilde{\Psi}_+(r) = A_+ \frac{2r-1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{2}{5} \left[\frac{1}{1-2r} + 3 \ln(2r-1) + 3(2r-1) + \frac{(2r-1)^2}{2} \right] \right\}.$$

Impondo $\tilde{\Psi}_-(r_s) = \tilde{\Psi}_+(r_s)$, obtemos

$$\boxed{A_- = \frac{3}{5} A_+} \quad ; \quad \boxed{\tilde{\Psi}_+(r_s) = \tilde{\Psi}_-(r_s) = \frac{8}{5} A_+}$$

Calculando as derivadas $d\tilde{\Psi}_+/dr$ e $d\tilde{\Psi}_-/dr$ como uma função de r , e definindo

$$\Delta'(w) = \frac{\left. \frac{d\tilde{\Psi}_+}{dr} \right|_{r_1+w} - \left. \frac{d\tilde{\Psi}_-}{dr} \right|_{r_1-w}}{\tilde{\Psi}(r_s)} \quad ; \quad r_1 = \frac{1}{2},$$

onde w é a meia largura do ilho, e mantendo termos até $\mathcal{O}(w^2)$, obtemos

$$\Delta'(w) \approx 8(1+2w) + 48w \ln w + 72w^2$$

A curva para $\Delta'(w)$ é mostrada abaixo. Portanto, para o perfil de corrente considerado, a largura ^{total} do ilho seria (normalizado ao raio da coluna de plasma) $2w \approx 0,128$, ou seja, da ordem de 12% do raio da coluna de plasma.

